Klausur

19. Juli 2004, 9:45 - 11:45 Uhr

Name: ....

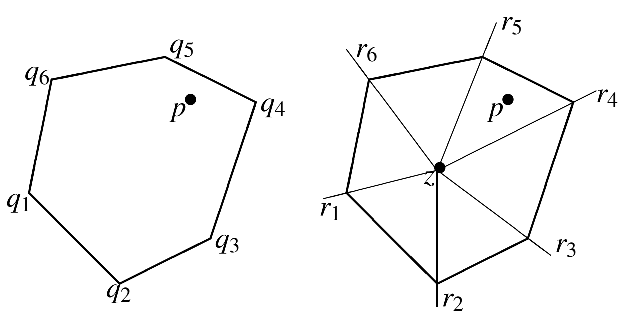
Matrikelnummer: ....

Anzahl beschriebener Blätter
(ohne Aufgabenblatt): ....

Bitte beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Name und Matrikelnummer!

Bearbeitungszeit:	120 Minuten	Gesamtzahl Aufgaben:	7
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!	Gesamtpunktzahl:	70

Aufgabe 1: 9 Punkte
Seien K ein konvexes Polygon und p ein Punkt in der Ebene. Ferner sei z ein gegebener Punkt, der innerhalb von K liegt. Die Eckpunkte q_i, $1 \leq i \leq n$, von K seien entgegen dem Uhrzeigersinn nummeriert und entsprechend der Nummerierung in einem gegebenen Feld abgelegt. Für $i = 1, 2, \ldots, n$, sei r_i der Strahl ausgehend von z, der durch die Ecke q_i geht.
Skizzieren Sie einen Algorithmus, der möglichst effizient testet, ob p in K liegt, wenn K wie beschrieben in einem Feld abgespeichert und z gegeben ist. Bestimmen Sie die Laufzeit ihres Algorithmus. Zur Korrektheit des Algorithmus brauchen Sie (ausnahmsweise) nichts zu sagen!



Aufgabe 2: 4 Punkte
Sei $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an:

(a) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau zwei } \$\}$
(b) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet auf } 00\}$

Aufgabe 3: 13 Punkte

(a) Definieren Sie **P** und **NP**.

(b) Geben Sie die formale Definition von **NP**-Vollständigkeit an.

(c) Wie kann man von einer Menge beweisen, dass sie **NP**-vollständig ist, ohne die Definition zu benutzen? Erklären Sie informell, warum dies richtig ist.

(d) Sei $B \in \mathbf{NP}$. Falls jemand einen deterministischen Polynomialzeitalgorithmus findet, der B entscheidet, muss dann $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gelten? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4: 6 Punkte

Ergänzen Sie die folgende Aussage bestmöglich ($O(\dots)$, ohne Beweis):

Eine hierarchische Darstellung einer Menge S von n Punkten, also eine hierarchische Darstellung der konvexen Hülle $\mathrm{CH}(S)$*, hat Größe .... und kann in Zeit .... berechnet werden. Mit Hilfe einer hierarchischen Darstellung können Extrempunktanfragen an S in Zeit .... beantwortet werden.*

Aufgabe 5: 12 Punkte

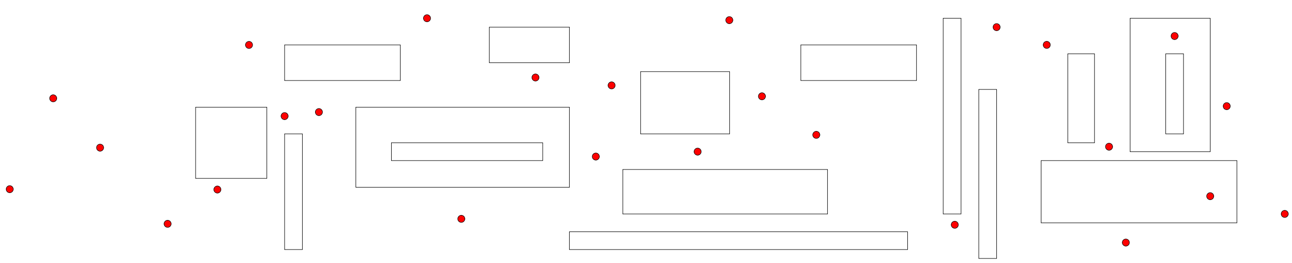
(a) Es gilt $2n\sqrt[3]{n} - 4n^2 + 6n^3 = \Theta(n^k)$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie k und beweisen Sie die Aussage.

(b) Gilt $2n\log_2 n = O(n^{\log_2 5})$? Beweisen Sie ihre Antwort.

(c) Gilt $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots + 1 = \Theta(n)$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6: 14 Punkte

Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene und sei $\mathcal{R}$ eine Menge von m achsenparallelen Rechtecken in der Ebene. Die Rechtecke haben die Eigenschaft, dass ihre Ränder sich weder schneiden noch berühren.



Geben Sie einen Plane-Sweep-Algorithmus an, der in Zeit $O((n+m)\log(n+m))$ entscheidet, ob es einen Punkt $p \in P$ und ein Rechteck $R \in \mathcal{R}$ gibt, so dass p in R enthalten ist. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeitschranke erfüllt und begründen Sie, warum ihr Algorithmus korrekt ist.

Aufgabe 7: 12 Punkte

Sei G ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Eine Teilmenge V' von V ist eine *unabhängige Knotenmenge* in G, wenn kein Paar von Knoten aus V' durch eine Kante in E verbunden ist. Wir definieren *IndependentSet* $:= \{(G,k) : k \in \mathbb{N}$ und G enthält eine unabhängige Knotenmenge mit k Knoten$\}$.

(a) Wählen Sie ein geeignetes Alphabet Σ und formulieren Sie *IndependentSet* als Sprache über Σ.

(b) Zeigen Sie, dass *IndependentSet* in **NP** liegt.