Klausur

12. Februar 2003, 8:00 - 10:00 Uhr

Name: ....

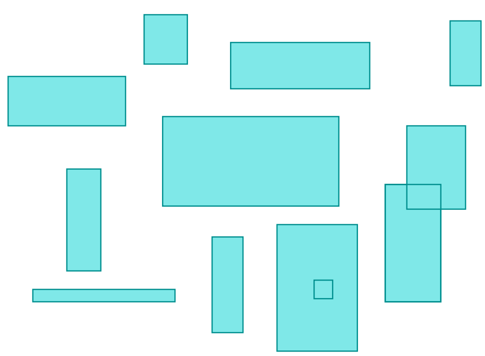
Matrikelnummer: ....

Anzahl beschriebener Blätter
(ohne Aufgabenblatt): ....

Bitte beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Name und Matrikelnummer!

Bearbeitungszeit:	120 Minuten	Gesamtzahl Aufgaben:	5
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!	Gesamtpunktzahl:	63

Aufgabe 1 (15 PUNKTE)
Sei $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ eine Menge achsenparalleler Rechtecke und sei $R_i = [x_i, x_i'] \times [y_i, y_i']$, $i = 1, \ldots n$. Sie dürfen annehmen, dass sich die achsenparallelen Rechtecke in $\mathcal{R}$ in allgemeiner Lage befinden.



Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ entscheidet, ob es in $\mathcal{R}$ zwei Rechtecke gibt, die einen Punkt (im Inneren oder auf dem Rand) gemeinsam haben. Zeigen Sie, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus.

Aufgabe 2 (14 PUNKTE)
Sei n eine Zweierpotenz und seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ zwei $n \times n$ Matrizen. Sei $C = A \cdot B = (c_{ij})$ die Produktmatrix von A und B. Nach Definition der Matrizenmultiplikation ist

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Wir können C anhand der Definition mit n^3 Multiplikationen und $n^2(n-1)$ Additionen berechnen. Im Einheitskostenmaß, dass heißt, unter der Annahme, dass jede Elementaroperation (Multiplikation oder Addition) auf den Einträgen der Matrizen Zeit $O(1)$ kostet, ergibt sich als Laufzeit $\Theta(n^3)$.

(a) Die Produktmatrix C kann man wie im folgenden Algorithmus angegeben auch rekursiv durch ein Teile-und-Herrsche Verfahren bestimmen:

> **Algorithmus** *Matrizenprodukt*(n, A, B)
> **if** $(n == 1)$
> **then return** 1×1 Matrix C mit $c_{11} = a_{11}b_{11}$
> **else**
>
> Zerlege A und B wie im Folgenden angegeben in $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen $A_{11}, A_{12}, \ldots, B_{22}$:
>
> $$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$
>
> $C_{11} = \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{11}, B_{11}) + \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{12}, B_{21})$
> $C_{12} = \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{11}, B_{12}) + \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{12}, B_{22})$
> $C_{21} = \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{21}, B_{11}) + \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{22}, B_{21})$
> $C_{22} = \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{21}, B_{12}) + \mathit{Matrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{22}, B_{22})$
>
> **return** $n \times n$ Matrix $C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$
>
> **endif**

Sei $T_{\text{MP}}(n)$ die Laufzeit von *Matrizenprodukt*$(n, \ldots)$ im Einheitskostenmaß. Stellen Sie die Rekursionsgleichung für $T_{\text{MP}}(n)$ auf und zeigen Sie, dass $T_{\text{MP}}(n)$ in $\Theta(n^3)$ liegt.

(b) Ähnlich wie bei der Karatsuba-Multiplikation kann man auf Kosten zusätzlicher billigerer Matrizenadditionen eine Matrizenmultiplikation einsparen und eine asymptotisch bessere Laufzeit als $\Theta(n^3)$ erzielen (Schnelle Matrizenmultiplikation nach Strassen):

> **Algorithmus** *SchnelleresMatrizenprodukt*(n, A, B)
> **if** $(n == 1)$
> **then return** 1×1 Matrix C mit $c_{11} = a_{11}b_{11}$
> **else**
>
> Zerlege A und B wie im Folgenden angegeben in $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen $A_{11}, A_{12}, \ldots, B_{22}$:
>
> $$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$
>
> $D_1 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{12} - A_{22}, B_{21} + B_{22})$
> $D_2 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{11} + A_{22}, B_{11} + B_{22})$
> $D_3 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{11} - A_{21}, B_{11} + B_{12})$
> $D_4 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{11} + A_{12}, B_{22})$
> $D_5 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{11}, B_{12} - B_{22})$
> $D_6 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{22}, B_{21} - B_{11})$
> $D_7 = \mathit{SchnelleresMatrizenprodukt}(\frac{n}{2}, A_{21} + A_{22}, B_{11})$
> $C_{11} = D_1 + D_2 - D_4 + D_6$
> $C_{12} = D_4 + D_5$
> $C_{21} = D_6 + D_7$
> $C_{22} = D_2 - D_3 + D_5 - D_7$
>
> **return** $n \times n$ Matrix $C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$
>
> **endif**

Sei $T_{\text{SMP}}(n)$ die Laufzeit von *SchnelleresMatrizenprodukt*$(n,\ldots)$ im Einheitskostenmaß. Stellen Sie die Rekursionsgleichung für $T_{\text{SMP}}(n)$ auf und lösen Sie die Rekursionsgleichung.

Aufgabe 3 (12 PUNKTE)

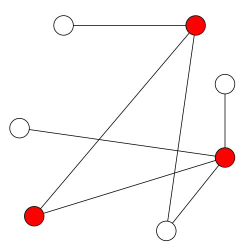
1. Seien A und B zwei Mengen. Definieren Sie den Begriff "A ist in Polynomzeit auf B reduzierbar" ($A \leq B$).
2. Seien A und B zwei jeweils nicht-leere Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Ferner seien auch die Komplementmengen von A und B nicht leer. Zeigen Sie: Falls A und B in **P** liegen, so gilt $A \leq B$ und $B \leq A$.
3. Geben Sie die formale Definition von **NP**-Vollständigkeit an. Wie kann man von einer Menge beweisen, dass sie **NP**-vollständig ist, ohne die Definition zu benutzen? Erklären Sie informell, warum dies richtig ist.

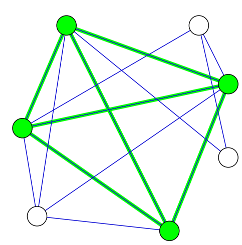
Aufgabe 4 (18 PUNKTE)
Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1,2,\ldots,m\}$ und Kantenmenge E. Eine Teilmenge V' von V heißt *Knotenüberdeckung* von G, falls für jede Kante e aus E mindestens einer der Endknoten von e in V' liegt. Eine Teilmenge V'' von v heißt Clique, falls jedes Paar von verschiedenen Knoten aus V'' durch eine Kante verbunden ist. Wir definieren die folgenden Mengen (*VC* steht für *vertex cover*):

VC $:= \{(G,k)$: der Graph G enthält eine Knotenüberdeckung, die aus höchstens k Knoten besteht $\}$
Clique $:= \{(G,k)$: der Graph G enthält eine Clique mit mindestens k Knoten $\}$

1. Beweisen Sie, dass $VC \in$ **NP**.
2. Beweisen Sie, dass $Clique \in$ **NP**.
3. Beweisen Sie, dass *Clique* **NP**-vollständig ist. Sie dürfen annehmen, dass *VC* **NP**-vollständig ist.

   Hinweis: Betrachten Sie den zu $G = (V,E)$ komplementären Graphen $\overline{G} = (V,\overline{E})$, bei dem Knoten genau dann durch eine Kante in $\overline{E}$ miteinander verbunden sind, wenn sie nicht durch eine Kante in E miteinander verbunden sind.





Aufgabe 5 (4 PUNKTE)
Sei P ein konvexes Polygon und sei $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ die Folge der Eckpunkte von P im Uhrzeigersinn, beginnend in p_0. Wir betrachten die Folge $\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \ldots, \delta_{n-1}^{(k)}$, wobei $\delta_i^{(k)}$ der Abstand zwischen p_k und dem Punkt $p_{k+i \bmod n}$ ist. Zeigen Sie, dass diese Folge nicht notwendigerweise aus einer monoton wachsenden Folge gefolgt von einer monoton fallenden Folge besteht.