Klausur

19. Februar 2004, 10:20 - 12:20 Uhr

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Anzahl beschriebener Blätter
(ohne Aufgabenblatt): ....

Bitte beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Name und Matrikelnummer!

Bearbeitungszeit:	120 Minuten	Gesamtzahl Aufgaben:	6
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!	Gesamtpunktzahl:	62

Aufgabe 1 (12 PUNKTE)
Sei H eine Menge horizontaler Strecken und V eine Menge vertikaler Strecken in allgemeiner Lage, d.h, die x- und y-Koordinaten der Endpunkte der Strecken seien jeweils paarweise verschieden. Geben Sie einen Algorithmus an, der alle Schnittpunkte zwischen den Segmenten in H und V möglichst effizient berechnet. Begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus. Analysieren Sie den Algorithmus, wobei $n = |H| + |V|$ und k die Anzahl der Schnittpunkte sei.

Aufgabe 2 (9 PUNKTE)

(a) Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ sind asymptotisch gleich, falls $f(n) = O(g(n))$ und $g(n) = O(f(n))$ gilt; $f(n)$ ist asymptotisch kleiner als $g(n)$, falls $f(n) = O(g(n))$ gilt, aber nicht $g(n) = O(f(n))$. Ordnen Sie die folgenden 8 Funktionen nach ihrem asymptotischen Verhalten (ohne Beweis). Machen Sie asymptotische Gleichheit gegebenenfalls kenntlich, beispielsweise indem Sie die sortierte Folge zeilenweise aufschreiben und asymptotisch gleiche Funktionen in dieselbe Zeile schreiben.

$$0.1n^2, \quad 4n + 6n\log n, \quad 17n^3 + 12n, \quad 10^6 \cdot \sqrt{n}, \quad 2\log\log n, \quad 7n - 5\sqrt{n}, \quad n^{\log_2 3}, \quad 5n^{\log_2 8} + 4n^2$$

(b) Gegeben sei folgende Rekursion(un)gleichung:

$$T(n) \leq \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ n\log n + 2 \cdot T(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Beweisen Sie eine möglichst gute obere Schranke für $T(n)$.

Aufgabe 3 (12 PUNKTE)

(a) Seien A und B Mengen. Definieren Sie den Begriff "A ist in Polynomzeit auf B reduzierbar" ($A \preceq_{\mathbf{P}} B$).

(b) Geben Sie die formale Definition von **NP**-Vollständigkeit an.

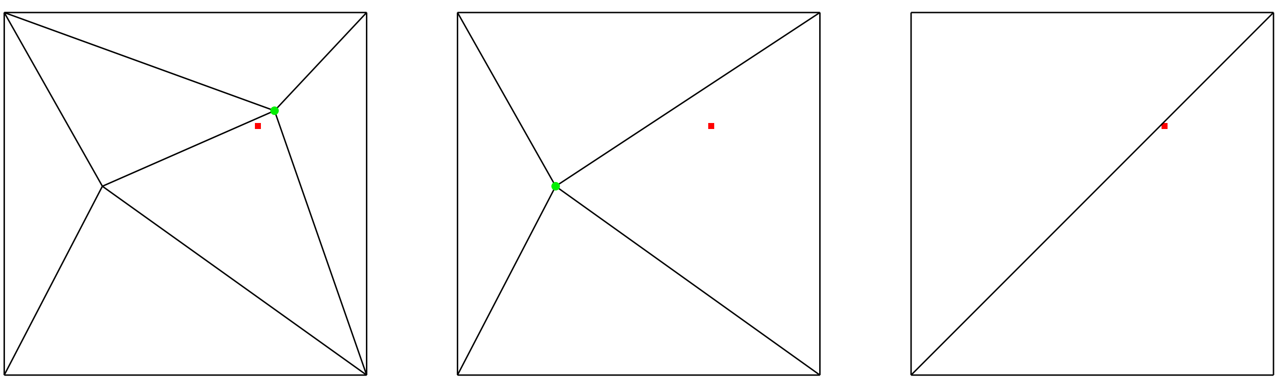
(c) Wie kann man von einer Menge beweisen, dass sie **NP**-vollständig ist, ohne die Definition zu benutzen? Erklären Sie informell, warum dies richtig ist.

Aufgabe 4 (14 PUNKTE)

(a) Zeigen Sie, dass mindestens die Hälfte der Knoten eines planaren Graphen Grad höchstens 11 hat, d.h., zu höchstens 11 Kanten inzident ist.
Hinweis: Denken Sie an die aus der Euler-Formel abgeleitete Schranke für die Anzahl der Kanten eines planaren Graphen und deren Beweis.

(b) Nehmen Sie an, sie wüssten, dass in einem Graphen $G = (V, E)$ mindestens die Hälfte der Knoten Grad höchstens 6 hat. Geben Sie einen (deterministischen!) Algorithmus an, der unter diesen Umständen in polynomieller Zeit eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq \lfloor |V|/14 \rfloor$ findet. Begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist. Sie müssen ausnahmsweise nicht begründen, warum die Laufzeit des Algorithmus polynomiell ist.

(c) Die Abbildung unten zeigt Unterteilungen S_1, S_2 und S_3, die zur Punktlokalisierung in S_1 dienen. Wählen Sie Bezeichnungen für die Dreiecke der Unterteilungen und zeichnen Sie die zugehörige Punktlokalisierungsdatenstruktur. Markieren Sie alle Datenstrukturknoten, die bei der Lokalisierung des als kleines Quadrat markierten Punktes besucht werden.



Aufgabe 5 (3 PUNKTE)
Wie lautet die Church-Turing These?

Aufgabe 6 (12 PUNKTE)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Eine Teilmenge V' von V heißt *Knotenüberdeckung* von G, falls für jede Kante e aus E mindestens einer der Endknoten von e in V' liegt. Eine Teilmenge V'' von V heißt Clique, falls jedes Paar von verschiedenen Knoten aus V'' durch eine Kante verbunden ist.

Sei Σ ein Alphabet mit $0, 1, \# \in \Sigma$. Wir definieren die folgenden Mengen (*VC* steht für *vertex cover*):

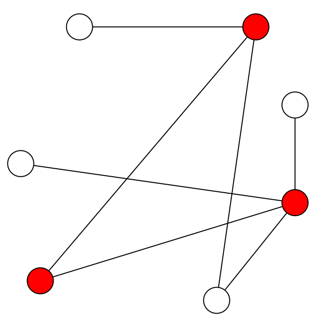
$VC := \{\#\sigma_{11} \dots \sigma_{1n}\#\sigma_{21} \dots \sigma_{2n}\# \dots \#\sigma_{n1} \dots \sigma_{nn}\#\#\mathrm{bin}(k)\# \in \Sigma^* \mid \sigma_{ij} \in \{0,1\}$ und $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ und $\sigma_{ii} = 0$ und $G = (V = \{1, 2, \dots, n\}, E)$ mit $\{i, j\} \in E \iff \sigma_{ij} = 1$ enthält eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k\}$

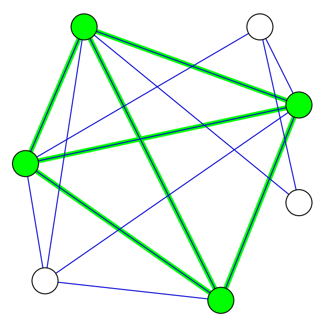
und

$Clique := \{\#\mu_{11} \dots \mu_{1n}\#\mu_{21} \dots \mu_{2n}\# \dots \#\mu_{n1} \dots \mu_{nn}\#\#\mathrm{bin}(k)\# \in \Sigma^* \mid \mu_{ij} \in \{0,1\}$ und $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ und $\mu_{ii} = 0$ und $G = (V = \{1, 2, \dots, n\}, E)$ mit $\{i, j\} \in E \iff \mu_{ij} = 1$ enthält eine Clique $V'' \subseteq V$ mit $|V''| = k\}$

(a) Beweisen Sie, dass $VC \in \mathbf{NP}$.

(b) Nehmen Sie an, Sie wüssten bereits, dass *Clique* eine **NP**-vollständige Menge ist. Beweisen Sie unter dieser Annahme, dass *VC* ebenfalls **NP**-vollständig ist.





Hinweis: Betrachten Sie den zu $G = (V, E)$ komplementären Graphen $\overline{G} = (V, \overline{E})$, bei dem Knoten genau dann durch eine Kante in $\overline{E}$ miteinander verbunden sind, wenn sie in E nicht durch eine Kante miteinander verbunden sind. Überlegen Sie sich (evtl. mithilfe obiger Abbildung), was mit den Knoten einer Clique V' und den Knoten in $V - V'$ beim Übergang zum komplementären Graphen geschieht.