Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 25. Februar 2010

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [6 Punkte]
Die Leonardo-Zahlen sind durch die Funktion $L\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 1 & \text{für } n = 1, \\ L(n-1) + L(n-2) + 1 & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass L eine **LOOP**-berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 2 [6 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$, definiert für alle $w \in \{a,b\}^*$ durch

$$f(w) = a^i b^j \qquad \text{für } i = |w|_a \text{ und } j = |w|_b,$$

Turing-berechenbar ist. (Hinweis: Es sei $|w|_x$ die Anzahl der Buchstaben x im Wort w.)

Aufgabe 3 [10 Punkte]
Es ist die Sprache

$$L = \{uavb \mid u, v \in \{a,b\}^*,\ |u| = |v|\}$$

gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die Sprache L

(a) monoton,
(b) kontextabhängig,
(c) kontextfrei,
(d) regulär

ist.

Aufgabe 4 [8 Punkte]
(a) Geben Sie die Definition der regulären Ausdrücke über einem Alphabet X wieder.
(b) Geben Sie die Definition der beschriebenen Sprache von regulären Ausdrücken über einem Alphabet X wieder.

Aufgabe 5 [3 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Konkatenation (Produkt) abgeschlossen ist.

Aufgabe 6 [3 Punkte]
Beweisen oder widerlegen Sie:

Wenn $L_1 \subseteq L_2$ gilt und L_2 regulär ist, so ist L_1 auch regulär.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 [8 Punkte]
Es sei

$$\mathcal{A} = (\{a, b\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\}, z_0, \{z_0, z_3\}, \delta)$$

ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit folgender Überführungsfunktion δ:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
a	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_3\}$
b	$\{z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_3\}$

(a) Zeichnen Sie den Zustandsgraph von $\mathcal{A}$.

(b) Wird das Wort aaa von $\mathcal{A}$ akzeptiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{A}$ äquivalenten deterministischen endlichen Automaten, gemäß des Beweises der Äquivalenz von nichtdeterministischen und deterministischen endlichen Automaten aus der Vorlesung. Sie brauchen dabei nicht alle Zustände, die sich aus der Potenzmengenkonstruktion ergeben, zu konstruieren, sondern nur die vom Startzustand aus erreichbaren.

Aufgabe 8 [6 Punkte]
Sei $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \to aS \mid aSbS \mid b\}$$

eine kontextfreie Grammatik. Überprüfen Sie mit Hilfe von aus der Vorlesung bekannten Algorithmen, ob $abbab$ zu $L(G)$ gehört.

Aufgabe 9 [4 Punkte]
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch? (Jeweils ohne Beweis.)

(a) Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten existiert eine äquivalente deterministische Turingmaschine – die also die gleiche Sprache wie der nichtdeterministische endliche Automat akzeptiert.

(b) Jede **LOOP/WHILE**-berechenbare Funktion ist auch **LOOP**-berechenbar.

(c) Es ist entscheidbar, ob ein Java-Programm „Hello world" ausgibt.

(d) Die Menge aller regulären Ausdrücke ist überabzählbar unendlich.

Aufgabe 10 [6 Punkte]

(a) Wann liegt eine Sprache in der Komplexitätsklasse $\mathbb{NP}$?

(b) Wann heißt eine Sprache $\mathbb{NP}$-vollständig?

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine $\mathbb{NP}$-vollständige Sprache (oder Problem) an. (Bitte definieren und nicht nur den Namen nennen.)

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine entscheidbare Sprache (oder Problem) an. (Bitte definieren und nicht nur den Namen nennen.)