Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Till Mossakowski

Magdeburg, 14. Februar 2019

Grundlagen der Theoretischen Informatik I

Klausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [6 Punkte]
Geben Sie das Zustandsübergangsdiagramm eines deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache

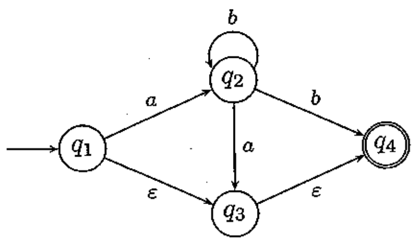
$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ hat ungerade Länge und enthält das Teilwort } aa\}$$

akzeptiert.

Aufgabe 2 [6 Punkte]
Es sei $\Sigma = \{a,b,c\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an. Sie dürfen dabei wie in der Vorlesung angegeben Klammern einsparen.

(a) $\{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ gibt es genau ein Vorkommen des Teilwortes } aaa\}$
(b) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und enthält eine gerade Anzahl von } a\text{'s}\}$

Aufgabe 3 [8 Punkte]
Es sei der nichtdeterministische endliche Automat M durch folgendes Zustandsübergangsdiagramm gegeben.



Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus dem Beweis der Äquivalenz von NEA und DEA einen zu M äquivalenten deterministischen endlichen Automaten. Sie brauchen dabei nicht alle Zustände, die sich aus der Potenzmengenkonstruktion ergeben, zu konstruieren, sondern nur die vom Startzustand aus erreichbaren.

Aufgabe 4 [8 Punkte]
Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen regulär sind.

(a) $L_a = \{(ab)^k \mid k \geq 0\}$
(b) $L_b = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$

Aufgabe 5 [8 Punkte]
Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen kontextfrei sind.

(a) $L_a = \{(ab)^k (cc)^k \mid k \geq 0\}$
(b) $L_b = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$
(c) $L_c = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > |w|_b \text{ und in } w \text{ gibt es genau ein Vorkommen des Teilwortes } aaa\}$

Aufgabe 6 [4 Punkte]
Es sei $G = (\{S,T\}, \{a,b\}, \{S \to ST \mid ab, T \to ab \mid \varepsilon\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

(a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $ababab$ an.
(b) Ist die Grammatik G mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 [4 Punkte]
Es sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform mit

$$R = \{S \to AB,\ A \to a,\ B \to AB \mid a \mid b\}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (CYK), ob das Wort $aaab$ in $L(G)$ enthalten ist oder nicht.

Aufgabe 8 [5 Punkte]
Wir betrachten folgendes Problem.

Es seien Turing-Maschinen M_1 und M_2 gegeben.
Gibt es eine Eingabe, bei der beide Turing-Maschinen halten?

Formulieren Sie das Problem als Sprache und beweisen Sie, dass die Sprache nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 9 [4 Punkte]
Wie lautet der Satz von Rice?

Aufgabe 10 [6 Punkte]
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie ihre Antworten.

(a) $\{\langle M\rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und $\mathcal{L}(M)$ enthält genau 42 Wörter$\}$
(b) $\{\langle M\rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und $\mathcal{L}(M)$ ist überabzählbar unendlich$\}$

Aufgabe 11 [4 Punkte]
Es seien A und B Sprachen, die NP-vollständig sind. Gilt dann $B \preceq_{\mathrm{P}} A$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 12 [10 Punkte]
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, wenn keine Kante zwischen zwei Knoten aus V' existiert. Eine Knotenmenge $V'' \subseteq V$ bildet eine *Knotenüberdeckung*, wenn jede Kante in E mindestens einen Knoten aus V'' enthält.

Wir definieren die Mengen INDEPENDENT-SET und VERTEX-COVER durch

$$\begin{aligned}\text{INDEPENDENT-SET} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer}\\ &\qquad\qquad \text{unabhängigen Knotenmenge mit } k \text{ Knoten, } k \in \mathbb{N}\},\\ \text{VERTEX-COVER} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer}\\ &\qquad\qquad \text{Knotenüberdeckung mit } k \text{ Knoten, } k \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Sprache VERTEX-COVER NP-vollständig ist. Sie dürfen dabei benutzen, dass die Sprache INDEPENDENT-SET NP-vollständig ist.

Aufgabe 13 [6 Punkte]
Geben Sie jeweils (ohne Begründung) an, welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche falsch.

Es gibt für jede richtige Antwort 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort 0,5 Punkte Abzug, in summa aber keine negativen Punkte.

(a) Falls L regulär ist, so ist jede Teilmenge von L eine reguläre Sprache.
(b) Falls L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, so ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.
(c) Falls L_1 und L_2 kontextfreie Sprachen sind, so ist auch $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.
(d) Es gibt kontextfreie Sprachen, die nicht entscheidbar sind.