Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 25. Juli 2008

Theoretische Informatik 2

Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [9 Punkte]
Geben Sie die Definition des Begriffs der *primitiv rekursiven Funktion* an.

Aufgabe 2 [4 + 5 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathrm{add}\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, definiert durch $\mathrm{add}(x, y) = x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$, primitiv rekursiv ist. Sie dürfen dabei nur die Definition der primitiv rekursiven Funktion benutzen.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{x} g(i)$$

ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 3 [2+2 Punkte]
Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gibt keine Funktion, die nicht primitiv rekursiv ist.

(b) Es gibt eine Funktion, die nicht durch Registermaschinen berechenbar ist.

Aufgabe 4 [8 Punkte]
Wir betrachten folgende Operationen über Mengen von Wörtern:

(a) Vereinigung,

(b) Durchschnitt,

(c) Durchschnitt mit regulären Mengen sowie

(d) Komplement.

Geben Sie für die Klasse der regulären und für die Klasse der kontextfreien Sprachen an, ob sie jeweils unter obigen Operationen abgeschlossen sind oder nicht. Geben Sie Ihre Antworten in einer Tabelle mit folgenden Einträgen an.

$+$: abgeschlossen, $-$: nicht abgeschlossen, ? : nicht bekannt.

Aufgabe 5 [2+2 Punkte]
Es seien L eine kontextfreie und R eine reguläre Sprache.

(a) Ist $L \setminus R$, also die mengentheoretische Differenz von L und R, in jedem Fall kontextfrei?

(b) Ist $R \setminus L$ in jedem Fall kontextfrei?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 [5 Punkte]
Gegeben ist die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, S\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit folgenden Regeln in P:

$$
\begin{array}{ll}
S \to AB, & C \to AC \mid Bc \mid A, \\
A \to CaC \mid a \mid b, & D \to dBCd. \\
B \to Bb \mid CACB \mid bDb, &
\end{array}
$$

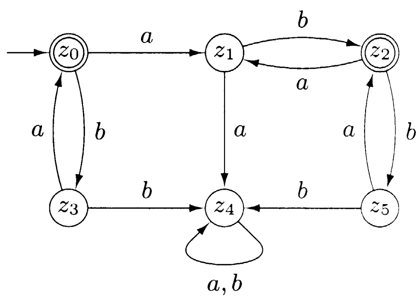
Bestimmen Sie gemäß einem der in der Vorlesung oder in der Übung behandelten Algorithmen, ob $L(G) = \emptyset$ gilt oder nicht.

Aufgabe 7 [6 Punkte]
Es sei $R = M(\,(abb^*a)^*\,)$. Entscheiden Sie, ob folgende Wortpaare zur gleichen Äquivalenzklasse von $\sim_R$ gehören oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) aba und aab,
(b) abb und $abab$,
(c) λ und aba.

Aufgabe 8 [6 + 4 Punkte]
Gegeben ist der deterministische endliche Automat A mit dem Überführungsgraphen in nebenstehender Abbildung.

(a) Bestimmen Sie den Minimalautomaten zu A gemäß einem der in der Vorlesung oder in der Übung behandelten Algorithmen.
(b) Geben Sie die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim_R$ für $R = T(A)$ an.



Aufgabe 9 [6 Punkte]
Geben Sie eine Grammatik mit Auswahlkontext oder eine programmierte Grammatik für die Sprache $\{ww \mid w \in \{a, b\}^+\}$ an.

Aufgabe 10 [2 + 2 Punkte]

(a) Wann heißt eine kontextfreie Grammatik mehrdeutig?
(b) Ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $P = \{S \to SS,\ S \to aSb,\ S \to \lambda\}$ mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11 [4 + 6 Punkte]

(a) Beschreiben Sie kurz die Algorithmen *Next-Fit* und *First-Fit* zur Approximation des *Bin Packing* Minimierungsproblems.
(b) Es sei $\frac{m_A(x)}{m^*(x)}$ die Güte eines Algorithmus A zur Approximation eines Minimierungsproblems bezüglich einer Instanz x. Dabei ist $m_A(x)$ der Wert der Lösung des Algorithmus A und $m^*(x)$ die optimale Lösung bezüglich der Instanz x.
Bestimmen Sie die Güte für die Algorithmen *Next-Fit* und *First-Fit* in Abhängigkeit von n mit $n > 0$ für folgende Instanz:

$$s_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{4} & \text{für } i \text{ gerade} \end{cases}$$

für $1 \leq i \leq 2n$.