Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

24. Juli 2009, 10:30 - 12:30 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	11
Gesamtpunktzahl:	67

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

Aufgabe 1 (7 PUNKTE)
Ein *Hamilton-Pfad* in einem einfachen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten genau einmal besucht wird. Die Sprache HAMILTON-PFAD $= \{\langle G \rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt$\}$ ist NP-vollständig. Zeigen Sie, dass die Sprache BOUNDED-DEGREE-SPANNING-TREE $= \{\langle G, k \rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, in dem jeder Knoten höchstens Grad k hat$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist.

Aufgabe 2 (5 PUNKTE)
Sei $\mathscr{P}$ ein Minimierungsproblem in NPO. Nehmen Sie an, es gibt eine Konstante c, so dass die Sprache

$$\{\langle x \rangle \mid x \text{ ist eine Probleminstanz von } \mathscr{P} \text{ mit } m^*(x) \leq c\}$$

eine NP-vollständige Sprache ist. Zeigen Sie, dass es dann für $r < \frac{c+1}{c}$ keinen r-approximierenden Algorithmus für $\mathscr{P}$ mit polynomieller Laufzeit gibt, es sei denn P $=$ NP.

Aufgabe 3 (5 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine **while**-berechenbare Funktion ist:

$$f(n_1) = \begin{cases} n_1 & n_1 \leq 2 \\ 2 \cdot n_1 & n_1 > 2 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (5 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n_1, n_2) = \binom{n_1 + n_2 + 1}{2} + n_1$$

primitiv rekursiv ist. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die Funktionen $\mathsf{plus} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{plus}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ und $\mathsf{nchoose2} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{nchoose2}(n_1) = \binom{n_1}{2}$ bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen sind.

Aufgabe 5 (6 PUNKTE)
Ein regulärer Ausdruck ist in *disjunktiver Normalform*, falls er von der Form $R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$ für ein $n \geq 1$ ist, wobei keiner der regulären Ausdrücke R_i das Vereinigungssymbol beinhaltet.

(a) Geben Sie einen zu $(a \cup b)^*$ äquivalenten regulären Ausdruck in disjunktiver Normalform an.

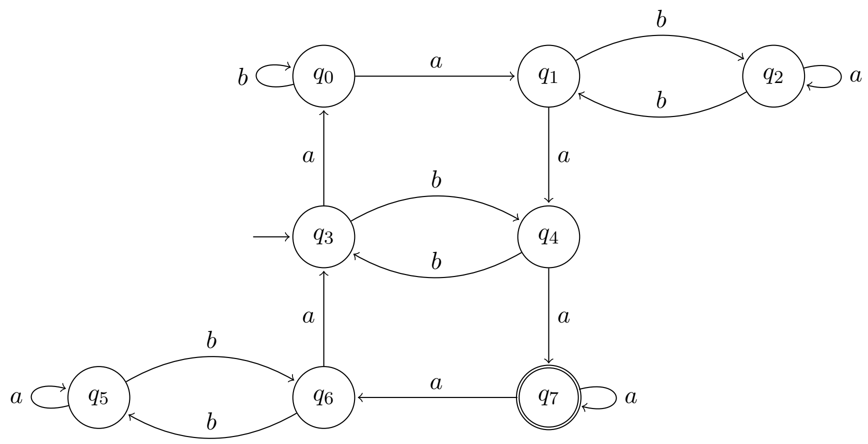
(b) Gibt es zu jedem regulären Ausdruck einen äquivalenten regulären Ausdruck in disjunktiver Normalform? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (5 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär ist, indem Sie zeigen, dass $\approx_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen besitzt.

Aufgabe 7 (5 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n c^n \mid n \geq 0\}$ deterministisch kontextfrei ist.

Aufgabe 8 (5 PUNKTE)
Sei $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$. Geben Sie eine reguläre Sprache L_{reg} an, so dass $\Psi(L_{\text{reg}}) = \Psi(L)$.

Aufgabe 9 (8 PUNKTE)
Geben Sie den Minimalautomaten an, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 10 (8 PUNKTE)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für lineare Sprachen, dass die Sprache $\{a^i b^j c^k d^\ell \mid i, j, k, \ell \geq 0 \text{ und } i = j \text{ und } k = \ell\}$ nicht linear ist.

(b) Ist die Klasse der linearen Sprachen abgeschlossen unter Konkatenation? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 11 (8 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch? (jeweils ohne Beweis)

(a) Für jede **while**-berechenbare Funktion gibt es ein **while**-Programm mit nur einer **while**-Schleife.

(b) Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereiningung.

(c) Für $w \in \{0, 1\}^*$ sei $K(w)$ die Kolmogorov-Komplexität von w. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| \geq n$ gilt: $K(w) \leq 2|w|$

(d) Es gibt eine (totale) berechenbare Funktion, die nicht primitiv rekursiv ist.