Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 16. Juli 2010

Grundlagen der Theoretischen Informatik II

Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [4 + 5 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathrm{mult}\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, definiert durch $\mathrm{mult}(x,y) = x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$, primitiv rekursiv ist.
Sie dürfen dabei – neben der Definition natürlich – nur benutzen, dass die Funktion $\mathrm{add}\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, definiert durch $\mathrm{add}(x,y) = x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$, primitiv rekursiv ist.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n) = \prod_{i=0}^{n} g(i) = g(0) \cdot g(1) \cdot \cdots \cdot g(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 2 [2 + 2 + 2 Punkte]

Geben Sie die partiell-rekursiven Funktionen f, g, h an, die folgendermaßen definiert sind:

$$f(0) = \mathrm{S}(\mathrm{Z})$$
$$f(y+1) = \mathrm{P}(\mathrm{P}_2^2(y, f(y)))$$

$$g(0) = \mathrm{Z}$$
$$g(y+1) = f(\mathrm{P}_2^2(y, g(y)))$$

$$h(x) = (\mu y)[\mathrm{add}(g(\mathrm{P}_1^2(x,y)), \mathrm{P}_2^2(x,y)) = 0]$$

Aufgabe 3 [2 + 2 Punkte]

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gibt keine Funktion, die nicht durch Registermaschinen berechenbar ist.

(b) Jede durch Registermaschinen berechenbare Funktion ist auch LOOP-berechenbar.

Aufgabe 4 [3 Punkte]

Zeigen oder widerlegen Sie:

Für alle Sprachen L_1, L_2 gilt: Falls $L_1 \cdot L_2$ regulär ist, so sind auch L_1 und L_2 regulär.

Aufgabe 5 [2 + 2 + 2 + 2 Punkte]

Wir betrachten folgende Operationen über Mengen von Wörtern:

(a) Vereinigung,

(b) Durchschnitt,

(c) Durchschnitt mit regulären Mengen sowie

(d) Komplement.

Geben Sie für die Klasse der regulären und für die Klasse der kontextfreien Sprachen an, ob sie jeweils unter obigen Operationen abgeschlossen sind oder nicht. Geben Sie Ihre Antworten in einer Tabelle mit folgenden Einträgen an.

$+$: abgeschlossen, $-$: nicht abgeschlossen, $?$: nicht bekannt.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 [3 + 3 Punkte]

Ein regulärer Ausdruck ist in *disjunktiver Normalform*, falls er von der Form $(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)$ für ein $n \geq 1$ ist, wobei keiner der regulären Ausdrücke R_i, $1 \leq i \leq n$, das Operationssymbol $+$ beinhaltet – dabei verzichten wir auf Klammern, die wegen der Assoziativität von $+$ nicht notwendig sind.

(a) Geben Sie einen zu $(a + b)^*$ äquivalenten regulären Ausdruck – also einen, der die gleiche Sprache beschreibt – in disjunktiver Normalform an.

(b) Gibt es zu jedem regulären Ausdruck einen äquivalenten regulären Ausdruck in disjunktiver Normalform? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 [3 Punkte]

Ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $P = \{S \to SS,\ S \to aSb,\ S \to ab\}$ mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 [3 + 3 Punkte]

(a) Es sei $R = \{aab, ab\}^*$. Zeigen Sie, dass folgende Wortpaare nicht zur gleichen Äquivalenzklasse von $\sim_R$ gehören.

(a, b), (a, aa), (a, λ).

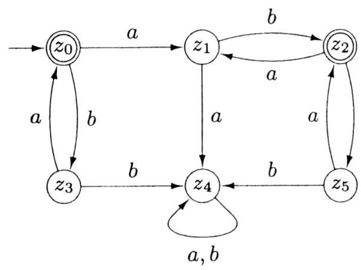
(b) Entscheiden Sie unter Benutzung des Satzes von Myhill-Nerode, ob die Sprache

$$R = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = xx^R \text{ für ein } x \in \{a, b\}^*\}$$

regulär ist oder nicht.

Aufgabe 9 [6 + 4 Punkte]

Gegeben ist der deterministische endliche Automat A mit dem Überführungsgraphen in nebenstehender Abbildung.



(a) Erläutern Sie einen in der Vorlesung oder in der Übung behandelten Algorithmus zum Minimieren von deterministischen endlichen Automaten, indem Sie ihn auf A anwenden.

(b) Geben Sie reguläre Ausdrücke für die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim_R$ für $R = T(A)$ an.

Aufgabe 10 [3 Punkte]

Man zeige: Die Menge der λ-freien regulären Mengen bildet keine volle AFL.

Aufgabe 11 [6 Punkte]

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche falsch? (Jeweils ohne Begründung.)

(a) Für $w \in \{0, 1\}^*$ sei $K(w)$ die Kolmogorov-Komplexität von w. Es gibt eine Turing-Maschine M mit $f_M(w) = K(w)$ für alle Eingaben $w \in \{0, 1\}^*$.

(b) Für $w \in \{0, 1\}^*$ sei $K(w)$ die Kolmogorov-Komplexität von w. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| \geq n$ gilt: $K(w) \leq 2 \cdot |w|$

(c) Das folgende Problem ist entscheidbar:

Gegeben:	Kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ in Chomsky-Normalform.
Frage:	Gibt es ein Wort $w \in T^*$, für das zwei verschiedene Linksableitungen bezüglich G existieren?

(d) Für alle kontextfreien Sprachen M und N gilt $(M^* \cdot N^*)^* = (M \cup N)^*$.