Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

13. Juli 2020, 8:00 - 10:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 11
Gesamtpunktzahl: 66

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Aufgabe 1 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Funktion doubledouble : $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit doubledouble$(n_1) = 4 \cdot n_1$ eine durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist, indem Sie eine Grammatik angeben, die die Funktion doubledouble berechnet.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Funktion doubledouble : $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit doubledouble$(n_1) = 4 \cdot n_1$ eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das die Funktion doubledouble berechnet.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie auf direktem Weg, also ohne Umweg über äquivalente Berechnungsmodelle, dass die einstellige Funktion nchoose2 mit

$$\text{nchoose2}(n_1) = \binom{n_1}{2}$$

und nchoose2$(0) = 0 =$ nchoose2(1) eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen hierbei lediglich annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion plus bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist.

Aufgabe 4 (9 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
○	○	Jede PSPACE-harte Sprache ist auch NP-hart.
○	○	Die Klasse PSPACE ist unter Vereinigung nicht abgeschlossen.
○	○	Jede durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist auch **loop**-berechenbar.
○	○	Jede primitiv rekursive Funktion ist auch durch eine Grammatik berechenbar.
○	○	Für jede Sprache L stimmen die Äquivalenzklassen von $\approx_L$ mit denen von $\approx_{\overline{L}}$ überein.
○	○	Sei $L = L(\ (ab)^*\ )/L(\ (aab)^* \cup (ba)^*\ )$. Dann besitzt $\approx_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen.

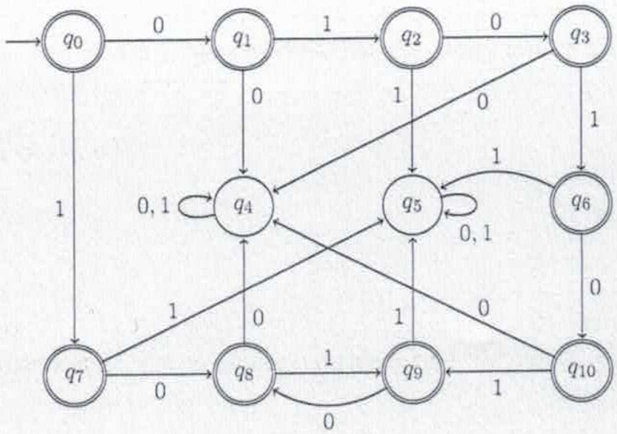
Aufgabe 5 (4 PUNKTE)
Sei $\mathcal{EI}_{\text{DPDA}} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1$ und M_2 sind deterministische Kellerautomaten und $L_f(M_1) \cap L_f(M_2) = \emptyset\}$ und sei L eine PSPACE-vollständige Sprache. Gilt dann $\mathcal{EI}_{\text{DPDA}} \preceq L$? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (4 PUNKTE)
Welche Approximationsgüte erreicht das folgende Verfahren zur Bestimmung eines Vertex Cover in einem einfachen Graphen? Begründen Sie ihre Antwort.

APPROX-VERTEX-COVER$(G = (V, E))$

$V' \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E$
while $(|E'| > 0)$
  do $e \leftarrow \{u, v\} \in E'$
    $V' \leftarrow V' \cup \{u, v\}$
    entferne alle Kanten aus E', die zu u oder v inzident sind
return V'

Aufgabe 7 (9 PUNKTE)
Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu dem folgenden deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



q_1	○									
q_2	○	○								
q_3	○	○	○							
q_4	○	○	○	○						
q_5	○	○	○	○	○					
q_6	○	○	○	○	○	○				
q_7	○	○	○	○	○	○	○			
q_8	○	○	○	○	○	○	○	○		
q_9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
q_{10}	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9

Aufgabe 8 (4 PUNKTE)
UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist ein ungerichteter Graph, der einen Hamiltonpfad besitzt$\} \subseteq \Sigma^*$ ist eine Sprache in NP. Ferner ist MINIMUM-LEAVES-SPANNING-TREE $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, der höchstens k Blätter (= Knoten vom Grad 1) hat$\} \subseteq \Gamma^*$ eine NP-vollständige Sprache. Also gilt UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD $\preceq_P$ MINIMUM-LEAVES-SPANNING-TREE. Geben Sie eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion $\tau : \Sigma^* \to \Gamma^*$ mit $w \in$ UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD genau dann wenn $\tau(w) \in$ MINIMUM-LEAVES-SPANNING-TREE an. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass τ die geforderte Bedingung erfüllt.

Aufgabe 9 (7 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Sprache LARGEST-SIMPLE-CYCLE $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen einfachen Kreis mit mindestens k Knoten besitzt$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen dabei alle Sprachen benutzen, von denen wir in den Vorlesungen oder den Übungen zu Grundlagen der Theoretischen Informatik I und II nachgewiesen haben, dass sie NP-vollständig sind.

Aufgabe 10 (5 PUNKTE)
Beim NP-vollständigen Problem PARTITION sind $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ gegeben und es ist zu entscheiden, ob es $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

Beim MINIMUM-BIN-PACKING Problem sind eine Korbgröße $B \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \leq B$ für alle $i = 1, \dots, n$ gegeben. Gesucht ist das minimale k, so dass es eine Partition von $\{1, \dots, n\}$ in k Teilmengen $S_1, \dots, S_k$ gibt mit

$$\sum_{i \in S_j} a_i \leq B \quad \text{für alle } j = 1, \dots, k$$

Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit für MINIMUM-BIN-PACKING gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{3}{2}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 11 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie mit Hilfe von Ogdens Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0,\ i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b.