Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 13. Februar 2012

Grundlagen der Theoretischen Informatik I

Klausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [4 Punkte]
Geben Sie die Definitionen der deterministischen akzeptierenden Turing-Maschine sowie der von ihr akzeptierten Sprache an (Konfiguration sowie Konfigurationsübergänge brauchen Sie nicht zu definieren).

Aufgabe 2 [6 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$, definiert für alle $w \in \{a,b\}^*$ durch

$$f(w) = a^i \quad \text{für } i = |w|_a,$$

Turing-berechenbar ist. (Hinweis: Es sei $|w|_x$ die Anzahl der Buchstaben x im Wort w.)

Aufgabe 3 [4 Punkte]
Beweisen Sie, dass die Klasse der LOOP-berechenbaren einstelligen Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ unter Komposition abgeschlossen ist.

Hinweis: Unter der Komposition (Hintereinanderausführung) zweier Funktionen $f_1, f_2 \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ versteht man die Funktion $(f_1 \circ f_2)\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$(f_1 \circ f_2)(n) = f_2(f_1(n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Es sei $X = \{a,b\}$. Geben Sie deterministische endliche Automaten für folgende Sprachen an.

$$L_1 = \{w \in X^* \mid w \text{ enthält genau zwei } a\text{'s}\},$$
$$L_2 = \{w \in X^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } aa\}.$$

Aufgabe 5 [8 Punkte]
Es sei

$$\mathcal{A} = (\{a,b\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\}, z_0, \{z_0, z_2\}, \delta)$$

ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit folgender Überführungsfunktion δ:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
a	$\{z_1\}$	$\emptyset$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$
b	$\emptyset$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_1\}$	$\emptyset$

(a) Zeichnen Sie den Zustandsgraph von $\mathcal{A}$.
(b) Welche der Wörter aba, aab, abb, bab werden von $\mathcal{A}$ akzeptiert, welche nicht? Ohne Begründung.
(c) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{A}$ äquivalenten deterministischen endlichen Automaten, gemäß des Beweises der Äquivalenz von nichtdeterministischen und deterministischen endlichen Automaten aus der Vorlesung.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 [6 Punkte]
Es sei $X = \{a, b, c\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen L_1 und L_2 an.

$$L_1 = \{w \in X^* \mid w \text{ enthält höchstens zwei } a\text{'s}\},$$
$$L_2 = \{w \in X^+ \mid \text{der erste und letzte Buchstabe von } w \text{ sind gleich}\}.$$

Aufgabe 7 [3 Punkte]
Beweisen oder widerlegen Sie:

Wenn $L_1 \subseteq L_2$ gilt und L_2 regulär ist, so ist L_1 auch regulär.

Aufgabe 8 [7 Punkte]
Es sei $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 0\}$ gegeben.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erzeugt.
(b) Beweisen Sie, dass L keine reguläre Sprache ist.

Aufgabe 9 [4 Punkte]
Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{(,), [,]\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \to (S),\ S \to [S],\ S \to (\,),\ S \to [\,],\ S \to SS\}.$$

Konstruieren Sie nach dem Verfahren aus der Vorlesung eine zu G äquivalente kontextfreie Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

Aufgabe 10 [4 Punkte]
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{A, B, C, D, S\}, \{a, b\}, P, S)$ in Chomsky-Normalform, wobei P aus den folgenden Regeln besteht:

$$S \to AB,$$
$$A \to BB \mid CC,$$
$$B \to AD \mid CA,$$
$$C \to a,$$
$$D \to b.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $aaaab$ in $L(G)$ enthalten ist oder nicht.

Aufgabe 11 [8 Punkte]
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch? (Jeweils ohne Begründung.)

(a) Zu jeder monotonen Sprache L existiert eine deterministische Turing-Maschine, die L akzeptiert.
(b) Das folgende Problem ist entscheidbar:

Gegeben:	Turing-Maschine M und Eingabewort w,
Frage:	Hält M bei Eingabe w nach höchstens 12 Schritten an?

(c) Es seien A und B $\mathbb{NP}$-vollständige Sprachen, dann gilt $A \propto B$.
(d) Für zwei Mengen A und B gelte $A \propto B$, dann gilt $A \in \mathbb{NP}$.

Aufgabe 12 [8 Punkte]
Wir definieren die Mengen *Clique* und *IS* durch

$$\begin{aligned} \mathit{Clique} := \{(G,k) \mid{} & G = (V,E) \text{ ist ungerichteter Graph},\ k \in \mathbb{N}; \\ & \exists T \subseteq V \text{ mit } |T| = k \text{ und } \forall v_1, v_2 \in T:\ v_1 \neq v_2 \implies (v_1, v_2) \in E\}, \\ \mathit{IS} := \{(G,k) \mid{} & G = (V,E) \text{ ist ungerichteter Graph},\ k \in \mathbb{N}; \\ & \exists T \subseteq V \text{ mit } |T| = k \text{ und } \forall v_1, v_2 \in T:\ (v_1, v_2) \notin E\}. \end{aligned}$$

Man zeige, dass *Clique* $\mathbb{NP}$-vollständig ist. Sie dürfen dabei die $\mathbb{NP}$-Vollständigkeit von *IS* (oder auch anderer $\mathbb{NP}$-vollständiger Probleme, außer *Clique* natürlich) benutzen.