

Grundlagen der Theoretischen Informatik II

Klausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Zeigen Sie, dass

$\text{DOUBLE-SAT} = \{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform, für die es mindestens zwei verschiedene erfüllende Belegungen gibt} \}$

eine NP-vollständige Sprache ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass SAT eine NP-vollständige Sprache ist.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Es seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine entscheidbare Sprache und $\kappa: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion mit $\kappa(x) = \max(1, |x|)$.

Zeigen Sie, dass (L, κ) definitionsgemäß festparameterhandhabbar ist.

Aufgabe 3 [5 Punkte]

Beim MINIMUM-KNOTEN-FÄRBBARKEIT-Problem ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ gegeben. Gesucht ist das minimale k , so dass der Graph G eine zulässige Knotenfärbung mit k Farben hat.

Man zeige, falls $\mathbb{P} \neq \text{NP}$, so gibt es keinen r -Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit für MINIMUM-KNOTEN-FÄRBBARKEIT mit $r < \frac{4}{3}$.

Hinweis: Das Problem 3-FÄRBBARKEIT ist eine NP-vollständige Sprache.

Aufgabe 4 [5 Punkte]

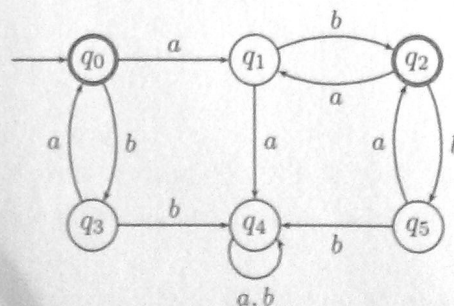
Es sei $\text{geh}: \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $\text{eff}: \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion ist, wobei

$$\text{eff}(n_1, \dots, n_k, n_{k+1}) = \sum_{i=0}^{n_{k+1}} \text{geh}(n_1, \dots, n_k, i)$$

für alle $n_1, n_2, \dots, n_{k+1} \in \mathbb{N}_0$ gilt. Sie dürfen dabei nur die Definition der primitiv rekursiven Funktionen verwenden und annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannten Funktionen plus, mult, power sowie die Konstantenfunktionen $c_{k,j}$ bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen sind.

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Es sei der folgende deterministische endliche Automat A gegeben.

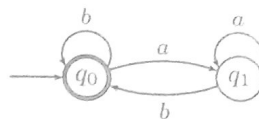


(a) Konstruieren Sie gemäß des in der Vorlesung behandelten Algorithmus den Minimalautomaten, der äquivalent zu A ist.

(b) Es sei $L = L(A)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\{a, b\}^*$ bezüglich der Relation \approx_L an.

Aufgabe 6 [6 Punkte]

Bestimmen Sie wie in der Vorlesung mit Hilfe der Gleichungen für X_{q_0} und X_{q_1} und der Kleene Algebra $\mathcal{M}(2, \mathbb{K}_{\{a,b\}})$ für die von nebenstehendem deterministischen endlichen Automaten akzeptierte Sprache einen regulären Ausdruck, der diese Sprache beschreibt.



Hinweis: Für die Matrix E ist E^* wie folgt definiert.

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad E^* = \begin{pmatrix} (A + BD^*C)^* & (A + BD^*C)^*BD^* \\ (D + CA^*B)^*CA^* & (D + CA^*B)^* \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 [3 Punkte]

Es sei $\text{co-NPSPACE} = \{L \mid \bar{L} \in \text{NPSPACE}\}$. Zeigen Sie $\text{NPSPACE} = \text{co-NPSPACE}$.

Aufgabe 8 [6 Punkte]

Es seien die Funktionen $f: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gegeben, die von den **loop**-Programmen Π_f bzw. Π_g berechnet werden. Geben Sie ein **loop**-Programm an, das die Funktion $h: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, definiert durch $h(n_1, n_2) = f(g(n_1), g(n_2))$ für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, berechnet.

Aufgabe 9 [6 Punkte]

Es sei die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ gegeben.

- Beweisen Sie, dass die Wörter ab und aab zu verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Relation \approx_L gehören.
- Beweisen Sie unter Benutzung des Satzes von Myhill-Nerode, dass die Sprache L nicht regulär ist.

Aufgabe 10 [7 Punkte]

Eine algebraische Struktur bestehend aus einer nichtleeren Menge \mathbb{K} , die verschiedene Konstanten 0 und 1 enthält, zwei binären Funktionen $+$ und \cdot und einer unären Funktion $*$ heißt *Kleene Algebra*, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$

$a + (b + c) = (a + b) + c$	(1)	$a(b + c) = ab + ac$	(8)
$a + b = b + a$	(2)	$(a + b)c = ac + bc$	(9)
$a + a = a$	(3)	$1 + aa^* = a^*$	(10)
$a + 0 = a$	(4)	$1 + a^*a = a^*$	(11)
$a(bc) = (ab)c$	(5)	$b + ac \leq c \Rightarrow a^*b \leq c$	(12)
$a1 = 1a = a$	(6)	$b + ca \leq c \Rightarrow ba^* \leq c$	(13)
$a0 = 0a = 0$	(7)		

gelten, wobei $a \leq b$ genau dann gilt, wenn $a + b = b$.

- Geben Sie eine Kleene-Algebra $(\mathbb{K}, 0, 1, *, +, \cdot)$ und Elemente $a, b \in \mathbb{K}$ an, so dass

$$\text{sowohl } 1 + a = 1 + b \quad \text{als auch} \quad a \neq b$$

gelten.

- Zeigen Sie, dass für jede Kleene-Algebra $(\mathbb{K}, 0, 1, +, \cdot, *)$ und für alle $a, b \in \mathbb{K}$

$$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$$

gilt.

Aufgabe 11 [9 Punkte]

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche falsch? (Jeweils ohne Begründung.)

Es gibt für jede richtige Antwort 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort 0,5 Punkte Abzug, in summa aber keine negativen Punkte.

- Für alle nicht-kontextfreien Sprachen M und N gilt $(M^* \cdot N^*)^* = (M \cup N)^*$.
- Für alle DEA M und alle Wörter $x, y \in \Sigma^*$ gilt mit $x \approx_{L(M)} y$ auch $x \sim_M y$.
- Die Ackermann-Péter-Funktion ist nicht durch eine Grammatik berechenbar.
- Die Klasse PSPACE ist unter Vereinigung abgeschlossen.
- Es gibt kontextfreie Sprachen, die nicht deterministisch kontextfrei sind.
- Es gilt $abcc \in \mathcal{L}(aa^*bcc^*)/\mathcal{L}(cc^*)$.