Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Till Mossakowski

Magdeburg, 8. Juli 2019

Grundlagen der theoretischen Informatik II

Klausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [7 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\text{SET-SPLITTING} = \{\langle U, C\rangle \mid U \text{ ist eine endliche Menge, } C = \{C_1, \ldots, C_k\} \text{ ist eine Familie von } k > 0 \text{ Teilmengen von } U \text{ und man kann die Elemente von } U \text{ rot oder blau so einfärben, dass in keinem Element } C_i \text{ von } C \text{ alle Elemente die gleiche Farbe haben}\}$$

eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürefn verwenden, dass die Sprache POSITIVE-NAE-3-SAT NP-vollständig ist, zur Erinnerung:

$$\text{POSITIVE-NAE-3-SAT} = \{\langle \phi\rangle \mid \phi \text{ ist eine boolesche Formel in KNF, in der alle Klauseln aus 3 Literalen bestehen, in der keine Variable negiert vorkommt und für die es eine erfüllende Belegung gibt, so dass in allen Klauseln nicht alle Literale den gleichen Wert haben}\}$$

Aufgabe 2 [6 Punkte]

(a) Geben Sie ein Approximationsverfahren zur Bestimmung eines Vertex Cover in einem einfachen Graphen an, das in Polynomialzeit Approximationsgüte 2 erreicht.

(b) Begründe Sie, dass Ihr Verfahren Approximationsgüte 2 erreicht.

Aufgabe 3 [3 Punkte]

Zeigen Sie skizzenhaft NP $\subseteq$ NPSPACE.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Funktion dnz: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, definiert für alle $n_1 \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\mathrm{dnz}(n_1) = 3 \cdot n_1 + 2,$$

nach Definition primitiv rekursiv ist. Sie dürfen hierbei voraussetzen, dass die aus der Vorlesung bekannten Funktionen plus un $c_{k,j}$ (Konstantenfunktionen) bereits primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 5 [4 Punkte]

Es sei die Funktion dnz: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, definiert für alle $n_1 \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\mathrm{dnz}(n_1) = 3 \cdot n_1 + 2,$$

gegeben. Geben Sie ein **loop**-Programm an, das die Funktion dnz berechnet und begründen Sie skizzenhaft die Korrektheit Ihres Programms.

Aufgabe 6 [3 Punkte]

Es seien $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid |m, n \geq 0\}$ und $L_2 = \mathcal{L}(b^\star)$ gegeben. Geben Sie den Quotienten L_1/L_2 an, ohne Begründung.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 [7 Punkte]
Zur Erinnerung: Eine algebraische Struktur $(\mathbb{K}, 0, 1, ^\star, +, \cdot)$ heißt *Kleene-Algebra,* falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{array}{rlr@{\qquad}rlr}
a + (b + c) & = (a + b) + c & (1) & a(b + c) & = ab + ac & (8) \\
a + b & = b + a & (2) & (a + b)c & = ac + bc & (9) \\
a + a & = a & (3) & 1 + aa^\star & = a^\star & (10) \\
a + 0 & = a & (4) & 1 + a^\star a & = a^\star & (11) \\
a(bc) & = (ab)c & (5) & b + ac \leq c & \Rightarrow a^\star b \leq c & (12) \\
a1 & = 1a = a & (6) & b + ca \leq c & \Rightarrow ba^\star \leq c & (13) \\
a0 & = 0a = a & (7) & \text{wobei } a \leq b & \text{g.d.w. } a + b = b &
\end{array}$$

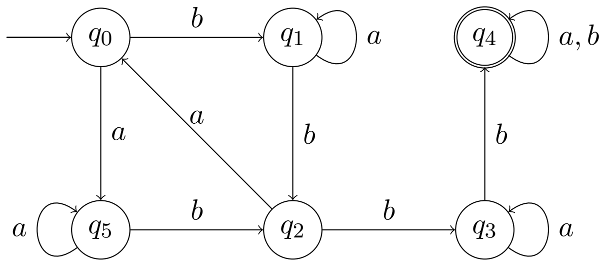
Zeigen Sie, nur unter Verwendung der obigen Definition, dass für jede Kleene-Algebra $(\mathbb{K}, 0, 1, ^\star, +, \cdot)$ und für alle $a, b \in \mathbb{K}$ Folgendes gilt.

(a) $b^\star \leq b^\star + a$
(b) $b + a^\star b = a^\star b$

Aufgabe 8 [6 Punkte]
Es sei die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass die Wörter ab und aab zu verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\approx_L$ gehören.
(b) Beweisen Sie unter Benutzung des Satzes von Myhill-Nerode, dass die Sprache L nicht regulär ist.

Aufgabe 9 [10 Punkte]
Es sei der folgende deterministische endliche Automat A gegeben.



(a) Konstruieren Sie gemäß des in der Vorlesung behandelten Table-Filling-Algorithmus den Minimalautomaten, der äquivalent zu A ist.
(b) Es sei $L = \mathcal{L}(A)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\{a, b\}^*$ bezüglich der Relation $\approx_L$ durch beschreibende reguläre Ausdrücke an, ohne Begründung.

Aufgabe 10 [4 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\{a^m c^m \mid m \geq 0\} \cup \{a^{2m} d b^m \mid m \geq 0\}$$

deterministisch kontextfrei ist.

Aufgabe 11 [9 Punkte]
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche falsch? (Jeweils ohne Begründung.)
Es gibt für jede richtige Antwort 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort 0,5 Punkte Abzug, in summa aber keine negativen Punkte.

(a) Für alle entscheidbaren Sprachen L gilt $L \in$ NPSPACE, falls $L \in$ PSPACE.
(b) Falls $B \in$ PSPACE und $A \preceq_P B$, so gilt auch $A \in$ PSPACE.
(c) Es gibt eine Parametrisierung κ für das Halteproblem $\mathscr{H}$, so dass $(\mathscr{H}, \kappa)$ festparameterhandhabbar ist.
(d) Die Ackermann-Péter-Funktion ist nicht durch eine Grammatik berechbar.
(e) Die Vereinigung zweier deterministisch kontextfreier Sprachen ist wieder deterministisch kontextfrei.
(f) Es gibt deterministisch kontextfreie Sprachen, die nicht in PSPACE enthalten sind.