

# Vorkurs Mathematik

FaRaFIN Vorkurs-Team

2024



Dieses Heft wurde vom Fachschaftratsrat der Fakultät für Informatik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg für den Mathematik-Vorkurs 2024 produziert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Spickzettel</b>	<b>5</b>
<b>2 Basismathematik</b>	<b>9</b>
2.1 Bruchrechnung . . . . .	9
2.2 Potenzen . . . . .	12
2.3 Binomische Formeln . . . . .	18
2.4 Polynomdivision . . . . .	23
<b>3 Quadratische Gleichungen</b>	<b>26</b>
3.1 Definition . . . . .	26
3.2 Lösen quadratischer Gleichungen . . . . .	26
3.3 Beispiele . . . . .	27
3.4 Aufgaben . . . . .	28
<b>4 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>30</b>
4.1 Definition . . . . .	30
4.2 Lineare Abhängigkeit . . . . .	30
4.3 Lösbarkeit . . . . .	30
4.4 Lösungsverfahren . . . . .	31
4.5 Beispiele . . . . .	34
4.6 Aufgaben . . . . .	37
<b>5 Betrag und Ungleichungen</b>	<b>39</b>
5.1 Betrag . . . . .	39
5.2 Ungleichungen . . . . .	41
<b>6 Vollständige Induktion</b>	<b>46</b>
6.1 Prinzip . . . . .	46
6.2 Einschub: Das Summenzeichen . . . . .	46
6.3 Beispielaufgabe . . . . .	47
6.4 Aufgaben . . . . .	48
<b>7 Funktionen</b>	<b>51</b>
7.1 Trigonometrische Funktionen . . . . .	52
7.2 Exponentialfunktionen und Logarithmus . . . . .	56
7.3 Kurvendiskussion, Differentiation, Integration . . . . .	59
<b>8 Vektoren</b>	<b>64</b>
8.1 Definition . . . . .	64
8.2 Operationen . . . . .	65
8.3 Linearkombination . . . . .	66

8.4	Lineare Abhängigkeit . . . . .	66
8.5	Betrag eines Vektors . . . . .	67
8.6	Skalarprodukt . . . . .	67
8.7	Kreuzprodukt . . . . .	68
8.8	Aufgaben . . . . .	69
<b>9</b>	<b>Matrizen</b>	<b>71</b>
9.1	Skalarmultiplikation . . . . .	71
9.2	Addition . . . . .	72
9.3	Transponation . . . . .	72
9.4	Multiplikation . . . . .	73
9.5	Inverse Matrix . . . . .	74
9.6	Aufgaben . . . . .	77
<b>10</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>78</b>
10.1	Historie . . . . .	78
10.2	Kartesische Darstellung . . . . .	78
10.3	Rechenoperationen . . . . .	79
10.4	Eulersche Darstellung . . . . .	80
10.5	Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten . . . . .	81
10.6	Aufgaben . . . . .	82

# 1 Spickzettel

Autor: Gerhard Gossen

Dieser „Spickzettel“ enthält grundlegende Definitionen und Schreibweisen, die du im Studium und im Vorkurs brauchst. Wir werden den Inhalt im Kurs meist voraussetzen.

## 1.1 Zahlenbereiche

Zeichen	Beschreibung	Beispiele
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen: Positive ganze Zahlen Die 0 ist meistens nur enthalten, wenn die Bezeichnung $\mathbb{N}_0$ verwendet wird	1; 2; 3; 454647; 8892349823
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen: Alle positiven und negativen ganzen Zahlen (engl. ganze Zahl: <i>integer</i> )	-2; -1; 0; 1; 2; 42; -645631; 3469079
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen: Zahlen, die sich als Bruch von zwei ganzen Zahlen darstellen lassen	$\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{3}$ ; $\frac{4}{3}$ ; $-\frac{6}{23}$ ; $0.2(=\frac{1}{5})$
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	1, 27; $\sqrt{2}$ ; $\pi$
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen (siehe Kap. 10)	$2 + 3i$ ; $i$ ; $-6 - 42i$

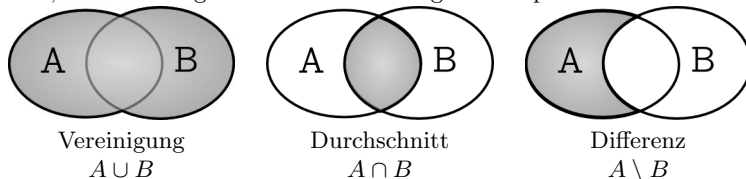
Jeder Zahlenbereich enthält alle Zahlenbereiche darüber:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

## 1.2 Mengen

Mengen können auf verschiedene Arten dargestellt werden. Die beiden wichtigsten sind diese:

- explizite Auflistung:  $M = \{a, b, c, d\}$  enthält die Elemente  $a, b, c$  und  $d$ .
- Angabe einer zu erfüllenden Bedingung:  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 42\}$  enthält alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und 42 (ohne diese beiden Zahlen).

Seien  $A, B$  zwei Mengen. Dann sind die folgenden Operationen definiert:



- $a$  ist Element von  $A$ :  $a \in A$ .
- Die leere Menge ( $\emptyset$ ) ist die Menge, die keine Elemente hat.

klein	groß	Name	übliche Verwendung
$\alpha$		Alpha	Winkel
$\beta$		Beta	Winkel
$\gamma$	$\Gamma$	Gamma	Winkel
$\delta$	$\Delta$	Delta	$\delta$ : Winkel; $\Delta$ : Differenz
$\varepsilon$		Epsilon	sehr kleine positive Zahl
$\eta$		Eta	
$\theta$		Theta	$\theta$ : Winkel
$\lambda$		Lambda	multiplikativer Faktor
$\mu$		My	
$\xi$		Xi	
$\pi$	$\Pi$	Pi	$\pi = 3, 14 \dots$ ; $\Pi$ : Produkt
$\rho$		Rho	
$\sigma$	$\Sigma$	Sigma	$\Sigma$ : Summe
$\tau$		Tau	
$\varphi$	$\Phi$	Phi	$\varphi$ : Winkel (in Polarkoordinaten)
$\chi$		Chi	
$\psi$	$\Psi$	Psi	
$\omega$	$\Omega$	Omega	

Tabelle 1.1: Auswahl von wichtigen griechischen Buchstaben

- Zwei Mengen sind gleich ( $A = B$ ), wenn beide aus den selben Elementen bestehen.
- Zwei Mengen heißen *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben:  $A \cap B = \emptyset$ .
- Eine Menge  $A$  kann vollständig in einer anderen Menge  $B$  enthalten sein:  $A \subseteq B$  (sprich:  $A$  ist eine Teilmenge von  $B$ ). Wenn  $A \neq B$  gilt, ist  $A$  eine *echte Untermenge* von  $B$  ( $A \subset B$ ).
- Analog ist definiert:  $A$  ist eine (*echte*) *Obermenge* von  $B$ :  $A \supseteq B$  ( $A \supset B$ ).
- Die *Komplementmenge*  $\bar{A}$  der Menge  $A$  enthält alle Elemente, die in  $A$  nicht enthalten sind. Wenn  $A$  eine Teilmenge einer Trägermenge  $X$  ist, dann gilt:  $\bar{A} = X \setminus A$

### 1.3 Intervalle

Ein Intervall ist ein zusammenhängender Zahlenbereich, der durch seine beiden Endpunkte bestimmt ist. Es wird zwischen geschlossenen und offenen Intervallen unterschieden. Ein *geschlossenes Intervall*  $[a, b]$  enthält  $a$  und  $b$  (inklusive), ein *offenes Intervall*  $(a, b)$  enthält  $a$  und  $b$  nicht mehr (exklusiv).

Es ist möglich, beide Arten zu kombinieren. Es entsteht ein *halboffenes Intervall*:  $[a, b)$  enthält  $a$ , aber nicht  $b$ , während  $(a, b]$  hingegen  $b$ , aber nicht  $a$  enthält.

Symbol	Bedeutung
$\exists x$	es existiert (mindestens) ein $x$
$\nexists x$	es existiert kein $x$
$\forall x$	für alle $x$ gilt ...
$\pm$	plus/minus, z. B. $x_{1,2} = \pm 1 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = +1$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$
$\infty$	unendlich
$\wedge$	logisches und
$\vee$	logisches oder
$\neg$	logische Negation
$:=$	ist definiert als
$\equiv$	ist äquivalent
$<$	kleiner als (oft auch: „echt kleiner“)
$\leq$	kleiner oder gleich
$>$	größer als (oft auch: „echt größer“)
$\geq$	größer oder gleich
$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$ $	teilt
$\nmid$	teilt nicht

Tabelle 1.2: Wichtige Sonderzeichen

## 1.4 Abkürzungen und Vokabeln

**gdw.** Kurz für „genau dann, wenn“. Als Symbol wird auch  $\Leftrightarrow$  verwendet.

**qed** Am Ende eines Beweises. Lateinisch „quod erat demonstrandum“ („was zu zeigen / beweisen war“). Bedeutung: Hurra, wir haben den Beweis endlich hinter uns. Gedruckt wird auch das Zeichen  $\square$  verwendet.

**kommutativ** „vertauschbar“. Eine Operation (z.B.  $+$ ,  $\cdot$ ) ist kommutativ, wenn man die beiden Operanden vertauschen kann, ohne das Ergebnis zu ändern. Als Formel ausgedrückt, heißt das:  $a \circ b = b \circ a$ , wobei  $\circ$  für die Operation steht.

**distributiv** Ausklammern ist erlaubt:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**assoziativ** Die Reihenfolge, in der die Operation durchgeführt wird, ist beliebig:  
$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

**es existiert ein** Es gibt *mindestens* ein Element, das die Aussage erfüllt.

**es existiert genau ein** Es gibt nur ein einziges Element, das die Aussage erfüllt.

**notwendige Bedingung** Diese Bedingung ist immer erfüllt, falls eine Aussage gilt. Es gibt aber auch Fälle, in denen die Bedingung erfüllt ist, obwohl die Aussage nicht gilt.

**hinreichende Bedingung** Wenn diese Bedingung erfüllt ist, gilt die Aussage auf jeden Fall. Es gibt aber Fälle, in denen die Aussage gilt, die Bedingung aber nicht erfüllt ist.

**notwendige und hinreichende Bedingung** Immer dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, gilt auch die Aussage (und umgekehrt).



# 2 Basismathematik

## 2.1 Bruchrechnung

Autor: Katja Matthes

### 2.1.1 Definition

Ein Bruch ist die Darstellung einer rationalen Zahl als Quotient.

Bruch:  $\frac{Z}{N}$  mit  $Z \in \mathbb{Z}$  und  $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Z ... Zähler      N ... Nenner

Zwei Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  heißen gleichnamig, wenn sie den gleichen Nenner haben:  
 $b = d$ .

### 2.1.2 Kürzen und Erweitern

Ein Bruch wird gekürzt, indem sowohl Nenner als auch Zähler durch die gleiche Zahl dividiert werden.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} \stackrel{:c}{=} \frac{a}{b}$$

Ein Bruch wird erweitert, indem sowohl Nenner wie Zähler mit dem gleichen Faktor multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \stackrel{\cdot c}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

### 2.1.3 Spezielle Rechenregeln

#### Addition von gleichnamigen Brüchen

Zwei gleichnamige Brüche werden addiert, indem ihre Zähler addiert werden und der Nenner übernommen wird.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

#### Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

Zwei gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem ihre Zähler subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

**Multiplikation mit einem Faktor**

Ein Bruch wird mit einem Faktor  $n$  multipliziert, indem der Zähler mit diesem Faktor multipliziert wird, während der Nenner übernommen wird.

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$$

**Division durch eine Zahl**

Ein Bruch wird durch eine Zahl  $n \neq 0$  dividiert, indem der Nenner mit dieser Zahl multipliziert wird und der Zähler beibehalten wird.

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}$$

**2.1.4 Allgemeine Rechenregeln****Addition**

Zwei Brüche werden addiert, indem sie zunächst gleichnamig gemacht werden und dann die Zähler addiert werden.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

**Subtraktion**

Zwei Brüche werden subtrahiert, indem sie zunächst gleichnamig gemacht werden und dann die Zähler subtrahiert werden.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

**Multiplikation**

Zwei Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Nenner und Zähler multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Division**

Ein Bruch wird durch einen anderen dividiert, indem er mit dessen Kehrwert multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**2.1.5 Aufgaben****Aufgabe 1**

Berechne und kürze soweit möglich.

1.  $\frac{8}{\frac{16}{27}}$

2.  $\frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{6}}$

3.  $\frac{5\frac{1}{5}}{\frac{11}{12}}$

4.  $\frac{\frac{99}{100}}{\frac{9}{10}}$

**Aufgabe 2**

Berechne und kürze soweit möglich.

1.  $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9}$

2.  $3\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{1}{3} : \frac{4}{9} - 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$

**Aufgabe 3**

Berechne und kürze soweit möglich.

1.  $(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) \cdot (\frac{9}{11} - \frac{3}{7})$

4.  $\frac{4}{5} : [(\frac{5}{8} - \frac{1}{3}) \cdot 12]$

2.  $(\frac{1}{8} + \frac{7}{12}) : (5 - \frac{3}{4})$

3.  $\frac{4}{7} \cdot ((1\frac{1}{2} - \frac{5}{9}) : 4\frac{1}{4})$

5.  $\frac{3}{4} \cdot (2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4})$

**Aufgabe 4**

Berechne und kürze soweit möglich.

1.  $\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{5}{14}}$

3.  $\frac{\frac{8}{9}}{3\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$

2.  $\frac{1\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}$

4.  $\frac{(\frac{3}{5} - \frac{5}{10}) : \frac{2}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$

## 2.2 Potenzen

Autor: Katja Matthes

### 2.2.1 Definition

Potenzen sind eine abkürzende Schreibweise für eine wiederholte Multiplikation mit einem Faktor.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

$a^n$  ... Potenz

$a$  ... Basis

$n$  ... Exponent

### 2.2.2 Besondere Exponenten

Seien  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ , dann gilt:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### 2.2.3 Potenzgesetze

Folgende **Potenzgesetze** gelten für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$  und  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

1. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten addiert werden.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten subtrahiert werden.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden und der Exponent beibehalten wird.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

4. Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem die Basen dividiert werden und der Exponent beibehalten wird.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

5. Potenzen werden potenziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten multipliziert werden.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

### 2.2.4 Wurzeln

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ , dann gilt:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Damit sind die Potenzgesetze auch auf Wurzeln anzuwenden. Man nennt  $a$  den Radikanden und  $n$  den Wurzelexponenten.

### 2.2.5 Wurzelgesetze

Für  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m, n > 1$  und nichtnegativen reellen Radikanden  $a$  und  $b$  gilt:

$$1. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$2. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$4. \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$$5. \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

## 2.2.6 Aufgaben

### Aufgabe 1

Vereinfache.

- |     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| 1.  | $3x^4 - x^4 - x^3(x + 2)$                                     | 13. | $t^2 \cdot x^2 \cdot t^n \cdot x^{n-1}$                                 |
| 2.  | $-12a^2 + 3a(a + 1)$  | 14. | $a \cdot b^k \cdot a^{2n} \cdot b^{k-3}$                                |
| 3.  | $ax^n + 4x^n$   | 15. | $(x - 2)^n \cdot (x - 2)^{1-n}$   |
| 4.  | $(1 - t)^2 - \frac{1}{2}(1 - t)^2$                            | 16. | $0,3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6$                               |
| 5.  | $a(x + t)^k - b(x + t)^k$                                     | 17. | $2^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5$                          |
| 6.  | $tx^3 - 3x^2 + 2tx^3 - 4x^2$                                  | 18. | $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$                                  |
| 7.  | $t^3 \cdot t^4 - t^5(t^2 + 1)$                                | 19. | $\left(\frac{x}{4}\right)^4 \cdot 4^6$                                  |
| 8.  | $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$                                     | 20. | $2^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x$                          |
| 9.  | $3a^k \cdot a^{k-1} \cdot a$                                  | 21. | $9 \cdot 3^{n+1}$   |
| 10. | $b^n \cdot b^{2n+1}$  | 22. | $(a - b)^9 \cdot (a - b)$   |
| 11. | $(x + 1)^{n-1} \cdot (x + 1)^{n+1}$                           | 23. | $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{c}{a-b}\right)^{2k}$ |
| 12. | $\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$ |     |   |

### Aufgabe 2

Vereinfache.

- |    |                                    |     |   |
|----|------------------------------------|-----|---|
| 1. | $\frac{a^6}{a^3}$                  | 8.  | $\frac{(a-b)^3}{(a-b)^{n-1}}$                     |
| 2. | $\frac{x^{2n+1}}{x^n}$             | 9.  | $\frac{(ab)^3}{x^2y} \cdot \frac{(xy)^2}{a^4b^2}$ |
| 3. | $\frac{15e^{x+1}}{5e^x}$           | 10. | $\frac{a^{n+1}}{a^n}$                             |
| 4. | $\frac{x^4}{x^7}$                  | 11. | $\frac{10^3}{2^3}$                                |
| 5. | $\frac{2a^{1-2n}}{4a^{n+1}}$       | 12. | $\frac{2,5^4}{0,5^4}$                             |
| 6. | $\frac{a^4b^{4n+3}}{a^n b^{2n-1}}$ | 13. | $\frac{(10ab)^k}{(4b)^k}$                         |
| 7. | $\frac{81}{3x+3}$                  | 14. | $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{a}{b}$    |

15.  $\left(\frac{-1}{a-b}\right)^3$
16.  $\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right)$
17.  $(-5^2)^3$
18.  $3(c^4)^3 - 6c^{12}$
19.  $(3b^2c^{n-1})^4$
20.  $\left(\frac{7a^2}{49b^3}\right)^2$
21.  $\left(\frac{-1}{c^3}\right)^{2n}$
22.  $(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2$
23.  $(x^2y^3z^2)^5$
24.  $(0,5e^{x+2})^2$
25.  $\left(\frac{2}{x^2}\right)^5 - \left(\frac{3}{x^5}\right)^2$
26.  $\left[\left(-\frac{3}{t}\right)^3\right]^4 \cdot \frac{t^9}{81}$
27.  $\frac{(ab)^2}{x^3y} \cdot \frac{x^5y^2}{a^2b}$
28.  $\frac{(4-12x)^3}{64}$
29.  $\frac{(2x-4)^5}{(2-x)^3}$
30.  $\frac{(4ab)^4}{(6a^2)^4} \cdot \frac{5}{b^4}$
31.  $(a-b^2) \cdot (a-b^2)^n$

### Aufgabe 3

Vereinfache.

1.  $\left(\frac{1}{2}x^2\right)^5 + \frac{1}{8}(x^2)^5 + (2x^5)^2$
2.  $\frac{1}{4} \cdot 2^4(2^2)^3$
3.  $(3^{n+1})^2$
4.  $(3x^2 - 5x)(1 - x^3) + (x^2 + 3x^4)x^3$
5.  $a^{2r}b^r(a^{2r} - a^r b^{r+1} + b^{2r+2})$

### Aufgabe 4

Vereinfache.

1.  $-3x^3 \cdot x^2 + 5x \cdot x^4$
2.  $4t^{n-4}t^3 - t \cdot t^{n-2}$
3.  $2x^5y^3y - 4x^3y^2x^2y^2$
4.  $\frac{4x^5+6x^4-12x^2}{2x^2}$
5.  $(9 \cdot 3^n - 3^{n+1}) : 3^{n-1}$
6.  $(2x+6)^2 + (x+3)^2$
7.  $\frac{5a-20}{4a-16}$
8.  $(3t^2 - 3t^3)^2$

**Aufgabe 5**

Faktorisiere - Schreibe als Produkt durch Ausklammern.

1.  $3a^2 + 6a^3$

5.  $x^4 + 2x^3$

2.  $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1}$

6.  $x^{n+3} - 4x^{n+2}$

3.  $a^{5b} + 3a^b$

7.  $-6t^{n+2} + 18t^{2-n}$

4.  $2^x + 2^{x+1}$

8.  $e^x - e^{3x}$

**Aufgabe 6**

Vereinfache.

1.  $\frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$

3.  $\frac{a^7 b^3 - a b^7}{a^5 b - a^2 b^4}$

2.  $\frac{e^{3x} + e^{2x}}{e^{2x}}$

4.  $\frac{32}{2^{n+5}} + \frac{2^{-n+3}}{8}$

**Aufgabe 7**

Berechne y.

1.  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2tx^3 + \frac{9}{2}t^2x^2$  mit  $x = 3t$

2.  $y = e^{x^2-t^2} + 3e^{5t-(t-x)}$  mit  $x = -t$

3.  $y = \frac{3}{2t^2}x^4 - \frac{4}{t}x^3 + 3x^2 - 4$  mit  $x = \frac{1}{3}t$

4.  $y = \frac{e^{3tx+4e^3}}{tx-4}$  mit  $x = \frac{1}{t}$

5.  $y = \frac{tx^3}{2(x+t)^2}$  mit  $x = -3t$

**Aufgabe 8**

Vereinfache.

1.  $\sqrt[42]{\sqrt{x}}$

2.  $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

3.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$

4.  $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{10}$



**Aufgabe 9**

Multipliziere aus und vereinfache.

1.  $\frac{1}{4} \cdot 2^{-4} \cdot (2^2)^3$

3.  $2^x(2^{-1} + 2^x)$

2.  $(e^x - e^{-x} + 5)e^x$

4.  $(x^4 + x^{-2})(x^3 - x^{-3})$

**Aufgabe 10**

Vereinfache/Fasse zusammen.

1.  $a^2 \cdot (a^2)^{-2} + 3a \left(\frac{1}{a}\right)^3$

6.  $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$

2.  $\frac{1}{18} \cdot (3^2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

7.  $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

3.  $(x^2 \cdot x^{-3})^{-2} + \left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1}$

8.  $6x^3 \cdot x^{-1} - 8x^4 \cdot x^{-2}$

4.  $a^5 \cdot a^{-2} + 4a^2 \cdot a$

9.  $(t^7 - t^4) \cdot t^{-3}$

5.  $\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$

**Aufgabe 11**

Vereinfache/Fasse zusammen.

1.  $\frac{-2^3 - 2 \cdot 4}{2 \cdot 2^3}$

3.  $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$

2.  $\frac{(1-x)^2}{(x-1)^2}$

4.  $\frac{1,5e^{3x} - e^x}{1,5e^{3x}}$

**Aufgabe 12**

Vereinfache/Fasse zusammen.

1.  $a^4 \cdot a^{-6} - 3a^3 \cdot a^{-5} + a^2$

2.  $(a^{n+2} - 4a^n - 2a^{2-n}) \cdot \frac{a^{-2}}{2}$

3.  $4x^{-4}x^7 - 0,5x^4x^{-1} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1,5}$

4.  $\frac{a^{n+1}}{a} + \frac{a^{2n-1}}{a^{n+2}} + (a^{n-1})^2 \cdot a^{2-n}$

5.  $\frac{2^{2k}}{8} \cdot 2^{3-k} + 2 \cdot 2^{k-1}$

**Aufgabe 13\***

Vereinfache. (Tipp: Mache eine Fallunterscheidung.)

1.  $(a-b)^n + (b-a)^n$

2.  $(x-2)^n + (2x-4)^n - (2-x)^n$

## 2.3 Binomische Formeln

Autor: Katja Matthes

### 2.3.1 Definition

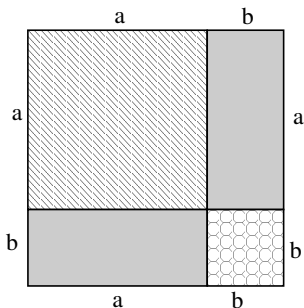
Die Binomischen Formeln sind Formeln zur Darstellung und zum Lösen von Quadrat-Binomen. Sie erleichtern das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und erlauben Term-Umformungen von bestimmten Summen und Differenzen in Produkte. Dies stellt sehr oft die einzige Lösungsstrategie bei der Vereinfachung von Bruchtermen, beim Radizieren von Wurzeltermen sowie Logarithmenausdrücken dar.

### 2.3.2 Formeln

#### Erste binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die erste binomische Formel kann wie im folgenden Bild dargestellt werden:



Die Fläche eines Quadrates entspricht seiner Seitenlänge zum Quadrat. In der Abbildung beträgt die Seitenlänge des Quadrats  $(a + b)$ . Dementsprechend ist der Flächeninhalt des gesamten Quadrates  $(a + b)^2$ .

Die gleiche Fläche entsteht auch, indem das schraffierte Quadrat (Fläche:  $a^2$ ), die zwei grauen Rechtecke (Fläche:  $2 \cdot ab$ ) und das gekringelte Quadrat (Fläche:  $b^2$ ) zusammen gelegt werden. Es ergibt sich also folgende Legende:

Legende



$= a^2$



$+ = 2ab$



$= b^2$



$+ 2$



$+$

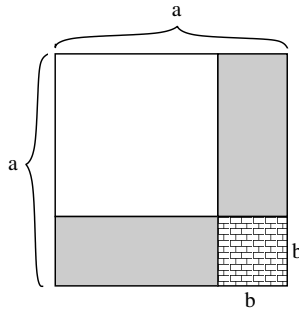


$= (a+b)^2$

**Zweite binomische Formel**

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Die zweite binomische Formel kann durch folgende Abbildung veranschaulicht werden:



Gesucht ist der Flächeninhalt des weißen Quadrats:  $(a - b)^2$ . Das gesamte Quadrat in der Abbildung hat eine Fläche von  $a^2$ . Zur Berechnung stehen zwei weitere Flächen zur Verfügung: Das gekachelte Quadrat besitzt alleine einen Flächeninhalt von  $b^2$  und zusammen mit einem grauen Rechteck jeweils einen Flächeninhalt von  $ab$ . Um die gesuchte Fläche zu erhalten, können von dem gesamten Quadrat zunächst die zwei grauen Rechtecke entfernt werden, indem  $2 \cdot ab$  abgezogen werden (also:  $-2 \cdot ab$ ). Dadurch wird das gekachelte Quadrat jedoch ein mal zuviel entfernt, so dass es wieder hinzuaddiert werden muss ( $+b^2$ ). Daraus ergibt sich folgende Legende:

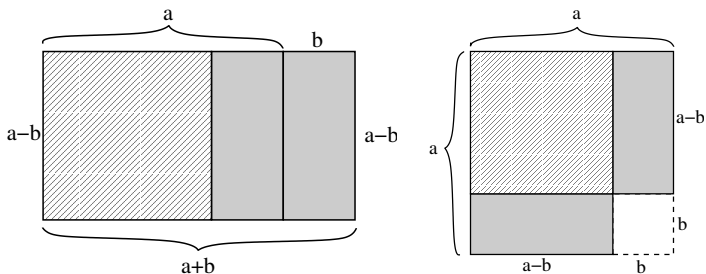
Legende

$$\begin{array}{r}
 \square + 2 \text{ (graues Rechteck)} + \text{(gekacheltes Quadrat)} = a^2 \\
 -2 \text{ (graues Rechteck + gekacheltes Quadrat)} = -2ab \\
 \text{(gekacheltes Quadrat)} = b^2 \\
 \hline
 \square = (a-b)^2
 \end{array}$$

**Dritte binomische Formel**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Die dritte binomische Formel kann mit Hilfe der beiden folgenden Bilder erklärt werden:



**Linkes Bild:** Die Fläche eines Rechtecks entspricht dem Produkt seiner Seitenlängen, hier  $(a + b)$  und  $(a - b)$ .

**Rechtes Bild:** Gesucht ist die Fläche, die aus dem schraffierten Quadrat und den beiden grauen Rechtecken besteht. Am einfachsten erhalten wir diese, indem wir (wieder) vom gesamten Quadrat (Fläche:  $a^2$ ) das kleine weiße Quadrat (Fläche:  $b^2$ ) abziehen.

Daraus ergibt sich folgende Legende:

**Legende**

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \boxed{\text{schraffiert}} + 2 \boxed{\text{grau}} + \boxed{\text{weiß}} = a^2 \\
 - \boxed{\text{weiß}} \\
 \hline
 \boxed{\text{schraffiert}} + 2 \boxed{\text{grau}} = (a+b)(a-b)
 \end{array} \\
 \end{array}$$

### 2.3.3 Aufgaben

#### Aufgabe 1

Forme unter Benutzung der binomischen Formeln um.

1.  $(4x + 3y^3)^2$

5.  $-\frac{1}{2}(x^2 - 4)^2$

2.  $-(x^4 - 2)^2$

6.  $(-\frac{1}{2}(x^2 - 4))^2$

3.  $(x^2 - x^3)(x^2 + x^3)$

7.  $x^2y^2(x^4 + 2x^2y + y^2)$

4.  $(3x^2 + 2t)^2$

#### Aufgabe 2

Vereinfache. Verwende dabei die binomischen Formeln.

1.  $(x - 3)^n \cdot (x + 3)^n$

5.  $\frac{(a^{2n} - b^{2n})^2}{(a^n - b^n)^2}$

2.  $\frac{(a^2 - b^2)^3}{(a - b)^3}$

6.  $(a^3 - ab^2)(a + b)^2$

3.  $\frac{(4 - x^2)^n}{(2 - x)^n}$

7.  $\frac{[(x - y)^2]^k}{(x^2 - y^2)^k}$

4.  $\frac{(c - 1)^{n-1}}{(c^2 - 1)^{n-1}}$

8.  $(a + b)^4(a - b)^4(a^2 - b^2)^5$

#### Aufgabe 3

Faktorisiere/Schreibe als Produkt.

1.  $(3x - 6)(\frac{1}{4}x^2 - x + 1)$

6.  $x^{2n} + 4x^n + 4$

2.  $a^2 - 2a^3 + a^4$

7.  $x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n$

3.  $3a^3 - 12a^9$

8.  $e^{2x} - 1$

4.  $x^4 - a^2$

9.  $x^2e^x + 2xe^x + e^x$

5.  $3 - x^2$

**Aufgabe 4**

Vereinfache.

1.  $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{(a+b)^2}$

8.  $\frac{4t^2-4}{t^2+2t+1}$

2.  $\frac{a^4-a^2b^2}{ab-a^2}$

9.  $\frac{x^{n-1}-x^n}{x^n-x^{n+2}}$

3.  $\frac{t^3+6t^2+9t}{t^2-9}$

10.  $\frac{2(a^2+b^2)^2}{a^5-ab^4}$

4.  $\frac{x^{2n}-10x^n+25}{x^{2n}-25}$

11.  $\frac{x^4-x^3}{x^4-x^2}$

5.  $\frac{x^6-t^2}{x^4+tx}$

12.  $\frac{x^3y-xy^5}{x^3y^2-x^2y^4}$

6.  $\frac{x^{n+3}-x^{n+1}}{x^{n+1}+x^n}$

13.  $\frac{am-an+bm-bn}{a^2-b^2}$

7.  $\frac{(x^2+8xy+16y^2)}{(2x-3y)^{-2}} : \frac{x^2-16y^2}{2x-3y}$

**Aufgabe 5**

Multipliziere aus und vereinfache.

1.  $(e^x + e^{-x})^2$

3.  $(x^{-2} - 3x)(x^{-2} + 3x)$

2.  $(a^2 - a^{-2})^2$

4.  $(2^{-x} + 2^x)(2^{-x} - 2^x)$

**Aufgabe 6**

Vereinfache/Fasse zusammen.

1.  $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^x-e^{-x}}$

2.  $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{x-y}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(x^2-y^2)}$

## 2.4 Polynomdivision

Autor: Gerhard Gossen Überarbeitung: Marko Rak

### 2.4.1 Definition Polynom

Ein Polynom ist ein Term der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

wobei die  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $x$  variabel sind.

Der Grad eines Polynoms ( $\text{grad } p(x)$ ) ist der höchste Exponent von  $x$ . Beispielsweise ist  $\text{grad}(3x^2 + 2x^5 - 25x) = 5$ .

### 2.4.2 Verfahren

Gegeben sind zwei Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$ . Die Division  $p(x) : q(x)$  ergibt zwei neue Polynome:

$$p(x) : q(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Dabei ist  $r(x)$  der „Rest“ der Division.

Bei der Berechnung entfernt man die höchsten Terme nacheinander. Dazu sucht man einen Term  $s_k = b_k x^k$ , der mit dem ersten Term von  $q$  multipliziert den ersten Term von  $p$  ergibt. Diesen Term multipliziert man mit  $q$  und subtrahiert ihn von  $p$ . Der entstehende Term  $p'$  ist vom Grad kleiner als  $p$ .  $s_k$  wird zum ersten Term von  $s(x)$  (dem „Ergebnispolynom“). Dieses Verfahren führt man solange durch wie möglich, also solange  $\text{grad } p'(x) \geq \text{grad } q(x)$ .

### 2.4.3 Beispiel

Berechnet werden soll  $(-3 - 3x^2 + x + x^3) : (1 + x)$ .

Zuerst ordnen wir die Polynome nach Exponenten:  $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x + 1)$ . Im ersten Schritt wird also  $x^3$  entfernt, der erste Ergebnisterm ist damit  $x^2$ , da  $x^2 \cdot x = x^3$ . Damit subtrahieren wir  $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$ .

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x + 1) = x^2 \quad + \frac{\quad}{x + 1} \\ \underline{-x^3 - x^2} \phantom{+ x - 3} \\ -4x^2 + x \phantom{- 3} \end{array}$$

Jetzt müssen wir also nur noch  $(-4x^2 + x - 3) : (x + 1)$  berechnen. Wir rechnen analog solange wie möglich weiter.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x + 1) = x^2 - 4x + 5 + \frac{\quad}{x + 1} \\
 \underline{-x^3 \quad -x^2} \\
 \quad -4x^2 + x \\
 \quad \underline{4x^2 + 4x} \\
 \quad \quad 5x - 3 \\
 \quad \quad \underline{-5x - 5} \\
 \quad \quad \quad -8
 \end{array}$$

Wir berechnen jetzt  $-8 : (x + 1)$ . Da  $\text{grad}(-8) < \text{grad}(x + 1)$ , bricht die Polynomdivision hier ab.  $-8$  ist der „Rest“  $r(x)$  der Berechnung.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x + 1) = x^2 - 4x + 5 + \frac{-8}{x + 1} \\
 \underline{-x^3 \quad -x^2} \\
 \quad -4x^2 + x \\
 \quad \underline{4x^2 + 4x} \\
 \quad \quad 5x - 3 \\
 \quad \quad \underline{-5x - 5} \\
 \quad \quad \quad -8
 \end{array}$$

Das Ergebnis von  $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x + 1)$  ist damit  $x^2 - 4x + 5 + \frac{-8}{x+1}$ . Als Probe multiplizieren wir das Ergebnis mit  $(x + 1)$ .

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 4x + 5 + \frac{-8}{x+1})(x+1) &= x^2(x+1) - 4x(x+1) + 5(x+1) + \frac{-8}{x+1}(x+1) \\
 &= (x^3 + x^2) + (-4x^2 - 4x) + (5x + 5) + (-8) \\
 &= x^3 - 3x^2 + x - 3
 \end{aligned}$$

Dies ist unser ursprüngliches Polynom, wir haben also richtig gerechnet.

#### 2.4.4 Weitere Beispiele

$$\begin{array}{r}
 (4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1) : (x^2 + 1) = 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{2x - 3}{x^2 + 1} \\
 \underline{-4x^5 \quad -4x^3} \\
 \quad -x^4 - 2x^3 + x^2 \\
 \quad \underline{x^4 \quad + x^2} \\
 \quad \quad -2x^3 + 2x^2 \\
 \quad \quad \underline{2x^3} \quad + 2x \\
 \quad \quad \quad 2x^2 + 2x - 1 \\
 \quad \quad \quad \underline{-2x^2} \quad - 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 2x - 3
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4) : (x^2 - 4) = x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{-x^4 \phantom{+ 2x^3} + 4x^2} \\
 2x^3 + x^2 - 8x \\
 \underline{-2x^3 \phantom{+ x^2} + 8x} \\
 x^2 - 4 \\
 \underline{-x^2 \phantom{- 4} + 4} \\
 0
 \end{array}$$

## 2.4.5 Aufgaben

Berechne.

1.  $(x^3 + 1) : (x + 1)$
2.  $(x^4 - x + 1) : (x^2 + x + 1)$
3.  $(x^2 - 9) : (x + 3)$
4.  $(6x^3 - 5x^2 - 36x + 35) : (3x - 7)$
5.  $(x^5 - x^3 + x^2 + x - 2) : (x^2 - 1)$
6.  $(3x^3 + 2x^2 + 4x + 9) : (3x + 5)$
7.  $(2x^5 + 8x^4 + x^3 - x^2 + 12x + 3) : (x^2 + 4x + 1)$
8.  $(x^6 - 2x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 15x^2) : (x^2 - x + 5)$
9.  $(2x^7 - x^6 + 3x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3) : (2x^3 - x^2 + 2x)$
10.  $(x^7 - 6x^5 + x^4 - 11x^2 - 3x + 1) : (x^3 + 2)$
11.  $(3x^5 + 6x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{20}{3}x) : (3x^4 + x^3 + 4x)$

# 3 Quadratische Gleichungen

Autor: Marc Mittner

Überarbeitung: Marko Rak, Julia Hempel, Johannes Jendersie

## 3.1 Definition

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, die sich auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

überführen lässt, mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Eine quadratische Gleichung ist in Normalform, falls  $a = 1$ , also

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit}$$

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{und}$$

$$q = \frac{c}{a}$$

## 3.2 Lösen quadratischer Gleichungen

Jede quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  hat entweder keine, eine oder zwei reelle Lösungen; für den Fall, dass die entstehende Parabel die  $x$ -Achse nicht berührt, einfach berührt oder schneidet.

### 3.2.1 p-q-Formel

Jede quadratische Gleichung in Normalform ( $x^2 + px + q = 0$ ) mit  $p^2 \geq 4q$  kann mit Hilfe der p-q-Formel gelöst werden. Die Herleitung erfolgt mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

### 3.2.2 Mitternachtsformel

Jede quadratische Gleichung ( $ax^2 + bx + c = 0$ ) mit  $a \neq 0$  kann mit Hilfe der Mitternachtsformel gelöst werden:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 3.2.3 Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist. Lässt sich eine Gleichung auf die Form  $x^k \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$  bringen, so hat die Gleichung nach dem Satz vom Nullprodukt die Lösungen  $x_{1,2,\dots,k} = 0$  und die Lösungen  $x_{k+1}$  und  $x_{k+2}$  können mit Hilfe der Mitternachtsformel gelöst werden.

### 3.2.4 Substitution

Hat eine Gleichung die Form  $ax^{2k} + bx^k + c = 0$ , so kann  $x^k$  durch eine Variable  $u$  substituiert werden:

$$au^2 + bu + c = 0$$

Diese Gleichung kann dann als quadratische Gleichung gelöst werden. Für die Ergebnisse  $u_1$  und  $u_2$  gilt dann:

$$\begin{array}{ll} u_1 = x^k & u_2 = x^k \\ x_{1,2} = \sqrt[k]{u_1} & x_{3,4} = \sqrt[k]{u_2} \end{array}$$

Dabei gilt für die Anzahl der Lösungen:

- keine Lösung, wenn  $u < 0$  und  $k$  gerade
- eine Lösung, wenn  $-\infty < u < \infty$  und  $k$  ungerade oder  $u = 0$  und  $k$  gerade.
- zwei Lösungen, wenn  $u > 0$  und  $k$  gerade

## 3.3 Beispiele

1.  $3x^2 + 3x - 36 = 0$  Ausklammern:

$$\begin{array}{rcl} 3(x^2 + x - 12) & = & 0 \\ x^2 + x - 12 & = & 0 \end{array}$$

Lösen mit p-q-Formel ( $p = 1$ ,  $q = -12$ ):

$$\begin{array}{rcl} x_{1,2} & = & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12} \\ & = & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\ & = & -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\ x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & -4 \end{array}$$

faktorierte Darstellung:

$$3(x - 3)(x + 4) = 0$$

### 3 Quadratische Gleichungen

$$2. \quad x^7 + 19x^4 - 216x = 0$$

Ausklammern:

$$\begin{aligned} x(x^6 + 19x^3 - 216) &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Substitution von  $x^3 = u$ :

$$u^2 + 19u - 216 = 0$$

Lösen mit p-q-Formel ( $p = 19$ ,  $q = -216$ ):

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= -\frac{19}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 216} \\ &= -\frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} + \frac{864}{4}} \\ &= -\frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{1225}{4}} \\ &= -\frac{19}{2} \pm \frac{35}{2} \\ u_1 &= 8 \\ u_2 &= -27 \end{aligned}$$

Resubstitution:

$x^3 = u_1$  ergibt die Lösungen

$$x^3 = 8$$

$$x_2 = 2$$

$x^3 = u_2$  ergibt die Lösungen

$$x^3 = -27$$

$$x_3 = -3$$

### 3.4 Aufgaben

Für alle Aufgaben gilt grundsätzlich:  $x, y, z \in \mathbb{R}$  sind Variablen und  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sind feste Parameter.

Löse die folgenden Gleichungen:

$$1. \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$2. \quad 4x^2 + 16x - 84 = 0$$

$$3. \quad \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$4. \quad 4x^2 + 48x + 144 = 0$$

$$5. \quad (x - \sqrt{157})^2 = 0$$

$$6. \quad \frac{7}{3}x^3 + \frac{49}{3}x^2 + 35x + 21 = 0$$

7.  $\frac{7}{4}x^2 + 7x = -7$
8.  $|x^2| = 4$
9.  $|x|^2 = 4$
10.  $|x^2 - 4| = 2$
11.  $x^2 = x + 12$
12.  $3x^2 + 4x + 1 = 0$
13.  $x^5 - 25x^3 + 144x = 0$
14.  $(x - \pi)(x + \pi) = 0$
15.  $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} + \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = 1$
16.  $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 70x = 0$
17.  $3x^7 - 42x^5 + 147x^3 = 0$
18.  $x^{12} = 4096$
19.  $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$
20.  $(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})^2 = 0$
21.  $2ax^2 - 12ax + 18a = 0$
22.  $\frac{1}{x^2} + 1 = 2$
23.  $\frac{4}{x} + x = 4$

# 4 Lineare Gleichungssysteme

Autor: Marko Rak

## 4.1 Definition

Als *lineares Gleichungssystem* bezeichnet man eine Menge von  $m$  linearen Gleichungen, die  $n$  Unbekannte enthalten. Allgemein lässt sich solch ein Gleichungssystem immer in folgender Form darstellen:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

## 4.2 Lineare Abhängigkeit

Eine lineare Gleichung der obigen Form ist *linear abhängig*, wenn sie sich durch die anderen Gleichungen des Systems und der Multiplikation mit einer Konstanten  $c_i$  darstellen lässt.

$$\begin{array}{cccccccc} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & - & b_1 \\ = & (a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & - & b_2) & c_2 \\ + & (a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & - & b_3) & c_3 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ + & (a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & - & b_m) & c_n \end{array}$$

Andernfalls ist sie *linear unabhängig* von den anderen Gleichungen des Systems.

## 4.3 Lösbarkeit

Ob ein lineares Gleichungssystem lösbar ist und wie viele Lösungen es hat, ist unterschiedlich. Dabei tritt immer einer der folgenden Fälle auf:

1. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_1 & = & -1 \end{array}$$

2. Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & -1 \end{array}$$

3. Das Gleichungssystem hat mehrere (meist unendlich viele) Lösungen.

$$x_1 - x_1 = 0$$

Kriterien für die Lösbarkeit und die Zuteilung eines linearen Gleichungssystems zu einem dieser Fälle, würde dem Vorlesungsinhalt vorgreifen und wird daher hier nicht ausführlich erklärt. Allgemein lässt sich jedoch sagen: Hat ein lineares Gleichungssystem mehr Unbekannte als linear unabhängige Gleichungen, so hat es mehrere Lösungen.

## 4.4 Lösungsverfahren

Neben den bereits bekannten Lösungsverfahren wie Gleich-, Einsetzungsverfahren usw., existieren noch weitere, systematische Verfahren. Dazu zählt u.A. das *Gauss-Verfahren* (auch *Gauss-Algorithmus* genannt), welches unter Verwendung einer vereinfachten Gleichungssystemdarstellung eine Diagonalform oder auch Dreiecksform erstellt. Diese beschleunigt das Finden von Lösungen.

### 4.4.1 Vereinfachte Darstellung

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lässt sich vereinfacht wie folgt darstellen:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_n$	
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\cdots$	$a_{1n}$	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$\cdots$	$a_{2n}$	$b_2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$\cdots$	$a_{3n}$	$b_3$
$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{m3}$	$\cdots$	$a_{mn}$	$b_m$

Nun werden die Unbekannten, da in allen Gleichungen der Systems gleich, nur noch im Tabellenkopf dargestellt. Tauchen in Gleichungen des Systems bestimmte Unbekannte nicht auf, werden sie in dieser Tabellendarstellung mit dem Faktor 0 aufgeführt. Das Gleichheitszeichen wird nun repräsentiert durch die Trennung vor der letzten Spalte. Auf die Additionsoperatoren wird gezielt verzichtet und die Subtraktion wird als Addition mit einem negativen Operanden betrachtet. Elementare Umformungen ändern nichts an der Lösung des linearen Gleichungssystems. Unter elementare Umformungen versteht man:

## 4 Lineare Gleichungssysteme

1. das Vertauschen von Spalten oder Zeilen
2. die Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten
3. die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

### 4.4.2 Diagonalform/Ablesen der Lösung

Die *Diagonalform* des obigen allgemeinen linearen Gleichungssystems sieht wie folgt aus:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\cdots$	$x_{n-1}$	$x_n$	
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$\cdots$	$a_{1(n-1)}$	$a_{1n}$	$b_1$
0	$a_{22}^*$	$a_{23}^*$	$a_{24}^*$	$\cdots$	$a_{2(n-1)}^*$	$a_{2n}^*$	$b_2^*$
0	0	$a_{33}^*$	$a_{34}^*$	$\cdots$	$a_{3(n-1)}^*$	$a_{3n}^*$	$b_3^*$
0	0	0	$a_{44}^*$	$\cdots$	$a_{4(n-1)}^*$	$a_{4n}^*$	$b_4^*$
$\vdots$				$\ddots$			$\vdots$
0	0	0	0	$\cdots$	$a_{(m-1)(n-1)}^*$	$a_{(m-1)n}^*$	$b_{m-1}^*$
0	0	0	0	$\cdots$	0	$a_{mn}^*$	$b_m^*$

Mittels dieses Schemas lassen sich die Lösungen des linearen Gleichungssystem relativ leicht erschließen. Man beginnt von unten und arbeitet sich zeilenweise aufwärts. Dabei kann mit jeder neuen Zeile eine weitere Unbekannte bestimmt werden. Aus der letzten Zeile

$$a_{mn}^* x_n = b_m^*$$

ergibt sich

$$x_n = \frac{b_m^*}{a_{mn}^*}.$$

Nun wird  $x_n$  in die vorletzte Zeile eingesetzt

$$a_{(m-1)(n-1)}^* x_{n-1} + a_{(m-1)n}^* x_n = b_{m-1}^*$$

und nach  $x_{n-1}$  umgestellt

$$x_{n-1} = \frac{b_{m-1}^* - \frac{a_{(m-1)n}^*}{a_{mn}^*} b_m^*}{a_{(m-1)(n-1)}^*}$$

Dies wird zeilenweise aufsteigend bis zur ersten Gleichung fortgesetzt, sodass bei vorhandener Lösung alle Unbekannten ermittelt werden können.



### 4.4.3 Gauss-Algorithmus

Der bereits angesprochene *Gauss-Algorithmus* dient der Herstellung der Diagonalform aus einem beliebigen linearen Gleichungssystem. Dazu wird die vereinfachte Darstellung genutzt und mittels elementarer Umformungen schrittweise die Dreiecksform erstellt. Wir wählen in jedem Schritt eine Gleichung und addieren ein Vielfaches dieser zu jeder anderen Gleichung, um eine Spalte mit möglichst vielen Nullen zu erzeugen.

Die Ausgangssituation stellt sich wie folgt dar:

$$\begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
 \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m
 \end{array}$$

Wir wählen die erste Gleichung aus und addieren ein Vielfaches davon zu den anderen Gleichungen, um in der ersten Spalte Nullen zu erzeugen.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & & & & & \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) & \cdot \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) & \cdots & \cdot \left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right) \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 & \leftarrow & & & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 & & \leftarrow & & \\
 \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m & & & & \leftarrow
 \end{array}$$

Somit ergibt sich nach dem ersten Schritt diese Tabelle:

$$\begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\
 \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} & b'_m
 \end{array}$$

Nun wählen wir die zweite Gleichung und addieren ein Vielfaches davon zu jeder folgenden Gleichung, um in der zweiten Spalte auch Nullen zu erzeugen.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_n$				
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\cdots$	$a_{1n}$	$b_1$			
0	$a'_{22}$	$a'_{23}$	$\cdots$	$a'_{2n}$	$b'_2$	$\cdot(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}})$	$\cdots$	$\cdot(-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}})$
0	$a'_{32}$	$a'_{33}$	$\cdots$	$a'_{3n}$	$b'_3$	$\leftarrow$		
$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$		$\ddots$	
0	$a'_{m2}$	$a'_{m3}$	$\cdots$	$a'_{mn}$	$b'_m$			$\leftarrow$

Was uns nach dem zweiten Schritt zu der folgenden Tabelle bringt:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_n$		
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\cdots$	$a_{1n}$	$b_1$	
0	$a_{22}$	$a_{23}$	$\cdots$	$a_{2n}$	$b'_2$	
0	0	$a_{33}$	$\cdots$	$a_{3n}$	$b'_3$	
$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	
0	0	$a''_{m3}$	$\cdots$	$a''_{mn}$	$b''_m$	

Dieser Ablauf wird wiederholt, bis die gewünschte Diagonalfom entstanden ist und sich das erzeugte Schema wie oben beschrieben auflösen lässt.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_{n-1}$	$x_n$		
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$\cdots$	$a_{1(n-1)}$	$a_{1n}$	$b_1$	
0	$a^*_{22}$	$a^*_{23}$	$\cdots$	$a^*_{2(n-1)}$	$a^*_{2n}$	$b^*_2$	
0	0	$a^*_{33}$	$\cdots$	$a^*_{3(n-1)}$	$a^*_{3n}$	$b^*_3$	
$\vdots$		$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$	
0	0	0	$\cdots$	0	$a^*_{mn}$	$b^*_m$	

### 4.5 Beispiele

Für alle Beispiele gilt  $x_i \in \mathbb{R}$

1. Eine mögliche Aufgabenstellung könnte das Lösen folgendes Gleichungssystems sein:

$$\begin{aligned}
 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\
 4x_1 - 12x_2 + 8x_3 &= 4 \\
 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich in die vereinfachte Form überführen:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
2	-5	3	3
4	-12	8	4
3	1	-2	9

Die schrittweise Umformung:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
2	-5	3	3 $\cdot(-2)$ $\cdot(-\frac{3}{2})$
4	-12	8	4 $\leftrightarrow$
3	1	-2	9 $\leftrightarrow$
2	-5	3	3
0	-2	2	-2 $\cdot(\frac{17}{4})$
0	$\frac{17}{2}$	$-\frac{13}{2}$	$\frac{9}{2}$ $\leftrightarrow$
2	-5	3	3
0	-2	2	-2
0	0	2	-4

Somit ergibt sich aus der letzten Zeile direkt  $2x_3 = -4$  und somit  $x_3 = -2$ . Dieses Ergebnis kann wiederum in die Gleichung der zweiten Zeile ( $-2x_2 + 2x_3 = -2$ ) eingesetzt werden. Die resultierende Gleichung  $-2x_2 + 4 = -2$  hat die Lösung  $x_2 = -1$ . Die Resultate für  $x_2$  und  $x_3$  können nun wiederum in die Gleichung der ersten Zeile ( $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 3$ ) eingesetzt werden und man erhält durch Umformung  $x_1 = 2$ . Es ergibt sich also nacheinander aus den letzten drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= -1 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Somit hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.

2. Die Ausgangssituation stellt sich wie folgt dar:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - 1x_3 &= -2 \\ -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \end{aligned}$$

und lässt sich vereinfacht darstellen:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	
3	-1	2	1
7	-4	-1	-2
-1	-3	-12	-5

Jetzt wird schrittweise die Diagonalform erzeugt.

Um Platz zu sparen, lassen sich alle Schritte in einer Tabelle durchführen.

$x_1$	$x_2$	$x_3$			
3	-1	2	1	$\cdot(-\frac{7}{3})$	$\cdot(\frac{1}{3})$
7	-4	-1	-2	$\leftrightarrow$	
-1	-3	-12	-5		$\leftrightarrow$
3	-1	2	1		
0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{13}{3}$	$\cdot(-2)$	
0	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{34}{3}$	$-\frac{14}{3}$	$\leftrightarrow$	
3	-1	2	1		
0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{13}{3}$		
0	0	0	4		

Nach Herstellung der Diagonalform lässt sich das Ergebnis wie oben beschrieben leicht erschließen. In diesem Beispiel entsteht ein Widerspruch in der letzten Gleichung:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4.$$

Somit hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

### 3. Ein letztes Beispiel in aller Kürze.

$x_1$	$x_2$	$x_3$			
1	-2	3	4	$\cdot(-3)$	$\cdot(-2)$
3	1	-5	5	$\leftrightarrow$	
2	-3	4	7		$\leftrightarrow$
1	-2	3	4		
0	7	-14	-7	$\cdot(-\frac{1}{7})$	
0	1	-2	-1	$\leftrightarrow$	
1	-2	3	4		
0	7	-14	-7		
0	0	0	0		

Es ist eine Nullzeile entstanden, welche auftritt, wenn zwei Gleichungen linear abhängig sind. Folglich hat das lineare Gleichungssystem nur noch 2 (linear unabhängige) Gleichungen und 3 Unbekannte. Es lässt sich eine Variable frei wählen, was zu unendlich vielen Lösungen für dieses lineare Gleichungssystem führt. Wir setzen also

$$x_3 = t, t \in \mathbb{R}$$

und lösen nun die anderen Unbekannten in Abhängigkeit von  $t$  auf.

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 + 2t \\ x_1 &= 2 + t \end{aligned}$$

## 4.6 Aufgaben

Für alle Aufgaben gilt  $x_i \in \mathbb{R}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  sind fest.

### 4.6.1 Einfache Gleichungssysteme

Bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme.

$$\begin{array}{rcl}
 1. & 7x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\
 & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\
 & 18x_1 & + & 21x_2 & + & 13x_3 & = & 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2. & x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\
 & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 3. & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 4. & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\
 & 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
 & 7x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -8 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 11
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 5. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\
 & & & 3x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 9 \\
 & 3x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 6. & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & -7 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -3 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 7. & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 13 \\
 & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 43 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 26
 \end{array}$$

### 4.6.2 Parametrisierte Gleichungssysteme\*

Bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$ .

$$\begin{array}{rclcl} 1. & 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & 7x_1 & + & 7x_2 & + & (4-a)x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & ax_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 3. & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & b \end{array}$$

# 5 Betrag und Ungleichungen

## 5.1 Betrag

Autor: Marc Mittner

Überarbeitung: Christian Braune

### 5.1.1 Definition

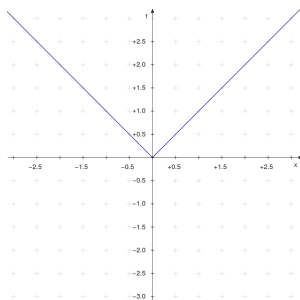
Für eine reelle Zahl  $x$  ist der Betrag definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

### 5.1.2 Die Betragfunktion

Graph der Betragfunktion  $f(x) = |x|$  ist:

- symmetrisch zur y-Achse
- $y \geq 0$  für alle Werte  $x \in \mathbb{R}$ .



### 5.1.3 Rechenregeln für den Betrag

1.  $|-a| = |a|$
2.  $|a| \geq 0$ ;  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4.  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$  für  $b \neq 0$
5.  $|a^n| = |a|^n$  für  $n \in \mathbb{N}$
6.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (sogenannte Dreiecksungleichung)

### 5.1.4 Beispiele

Gleichungen mit Beträgen werden durch Fallunterscheidung gelöst.

1.  $|x - 1| = 3$

Fallunterscheidung

1. Fall:

$$+(x - 1) = 3$$

$$x = 4$$

2. Fall:

$$-(x - 1) = 3$$

$$x = -2$$

2.  $(x + 3)^2 = 4 \rightarrow |x + 3| = 2$

Fallunterscheidung

1. Fall:

$$+(x + 3) = 2$$

$$\rightarrow x = -1$$

2. Fall:

$$-(x + 3) = 2$$

$$\rightarrow -x - 3 = 2$$

$$\rightarrow x = -5$$

### 5.1.5 Aufgaben

Löse die folgenden Gleichungen:

1.  $|x| = 7$

2.  $|x + 5| = 10$

3.  $|2x - 3| = 1$

4.  $|2x - 4| = 6x + 36$



## 5.2 Ungleichungen

Autor: Marc Mittner

Überarbeitung: Christian Braune

### 5.2.1 Definition

Eine Ungleichung stellt eine Ordnung zweier mathematischer Objekte dar. Ungleichungen werden bezüglich der Anzahl der Variablen und der Potenz, in der die Variablen auftreten, unterschieden. Dabei variiert je nach Typ der Ungleichung das Lösungsverfahren.

### 5.2.2 Äquivalenzumformung von Ungleichungen

Zur Umformung von Ungleichungen sind folgende Operationen zulässig:

- Addition einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  auf beiden Seiten.
- Subtraktion einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  auf beiden Seiten.
- Multiplikation/Division mit einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  auf beiden Seiten.
- Multiplikation/Division mit einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a < 0$  auf beiden Seiten. Dabei ist zu beachten, dass das Ordnungszeichen umgedreht wird!
- Bei Ziehen der Quadratwurzel muss darauf geachtet werden, dass die Ungleichung in zwei Teile zerfällt:

$$\begin{aligned} x^2 < a^2 &\Leftrightarrow \\ -a < x < a &\Leftrightarrow \\ |x| < a & \end{aligned}$$

Änderung der Ordnungszeichen bei Multiplikation/Division mit einer Zahl  $a < 0$ :

- $<$  wird zu  $>$ , aus  $>$  wird  $<$
- $\leq$  wird zu  $\geq$ , aus  $\geq$  wird  $\leq$
- Die Zeichen „ $=$ “ und „ $\neq$ “ bleiben erhalten.

Nicht generell erlaubt sind folgende Umformungen:

- beidseitige Multiplikation mit 0
- beidseitige Division durch 0
- beidseitiges Quadrieren

### 5.2.3 Lineare Ungleichungen

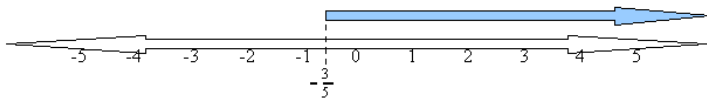
Eine lineare Ungleichung ist eine Ungleichung, in der die Variable nur in der ersten Potenz enthalten ist. Jede lineare Ungleichung kann in eine dieser drei Formen gebracht werden:

$$ax + b > c \quad \text{oder} \quad ax + b \geq c \quad \text{oder} \quad ax + b \neq c$$

Zur Lösung einer linearen Ungleichung wird die Variable durch Umformen isoliert:  
Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 3 - 4x - 13 + 2x - 3x + 12 \leq 5 & & \text{Zusammenfassen} \\ -5x + 2 \leq 5 & & | - 2 \\ -5x \leq 3 & & | \div (-5) \\ x \geq -\frac{3}{5} & & \end{array}$$

Graphische Darstellung des Lösungsbereichs:



Allgemein:

$$\begin{array}{rcl} ax + b \leq c & & | - b \\ ax \leq c - b & & | \div a \quad (a > 0) \\ x \leq \frac{c - b}{a} & & \end{array}$$

### 5.2.4 Ungleichungen mit mehreren Variablen

Ungleichungen mit mehreren Variablen haben statt einem eindimensionalen einen mehrdimensionalen Lösungsbereich. Die Dimension nimmt mit der Anzahl der Variablen zu. So hat ein Ungleichungssystem mit zwei Variablen eine Lösung im  $\mathbb{R}^2$  (also in einer Ebene) und Ungleichungssysteme mit  $n$  Variablen haben eine Lösung im  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel: Ungleichung mit 2 Variablen**

$$\begin{array}{l} 2x^2 + 3 - y - 2 > 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}y + 2 \end{array}$$

Zum Lösen des Ungleichungssystems wird zuerst eine Variable isoliert.

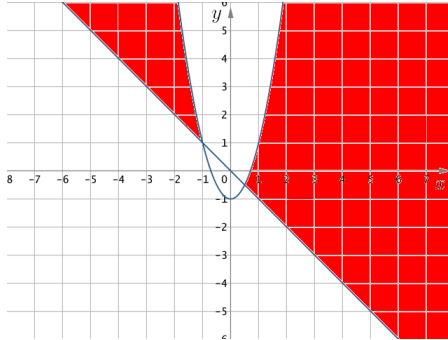
$$y < 2x^2 - 1$$

$$y > -x$$

Dadurch ergibt sich nun:

$$2x^2 - 1 > y > -x$$

Graphische Darstellung des Lösungsbereichs:



Der markierte Bereich stellt den Lösungsbereich dar.

Die Punkte auf den Funktionen selbst sind nicht im Lösungsbereich enthalten.

Für den Bereich  $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$  existiert keine Lösung.

Für alle anderen Werte von  $x$  sind alle Punkte, für die die Bedingung

$$2x^2 - 1 > y > -x$$

erfüllt ist, in der Lösungsmenge enthalten.

## 5.2.5 Aufgaben

### Ungleichungen mit einer Variablen

Löse folgende Ungleichungssysteme analytisch:

1.  $\frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$

2.  $(x + 1)(x - 1) \leq 0$   
 $\sqrt{x} \geq 1$

3. Gib die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von  $a$  an.

$$ax^2 > 0$$

$$\frac{1}{2}x + 1 > 0$$

4. Gib die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von  $a$  an.

$$x^2 + a > 0$$

$$\frac{1}{2}x + 1 > 0$$

5. Gib die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von  $a$  an.

$$-x^2 + a < 0$$

$$x + a < 0$$

6.  $(x - 1)^2 - 4 < 0$

$$-(x + 1)^2 + 4 > 0$$

7.  $\sqrt{(x - 1)} \geq 0$

$$-\frac{1}{4x} + 4 < 0$$

8.  $x^4 - 16 \leq 0$

$$x^3 + 1 \geq 0$$

### Ungleichungen mit mehreren Variablen

Löse folgende Ungleichungssysteme graphisch:

1.  $-x^2 + 5 < y$

$$x(x - 3)^2 > y$$

$$-x - 2 > y$$

2.  $3x^2 - 3x - 10 < -4 + y$

$$y \leq \frac{1}{2}$$

3.  $\frac{1}{2}x^2 - 3x \leq y$

$$y \leq -x$$

$$17x^3 - \frac{1}{2} = y$$

4.  $y + \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}} > 0$

$$\frac{2}{20}x - \frac{1}{3}y + \frac{3}{12} < 0$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & \frac{1}{2}x - 2 < y \\
& \frac{1}{2}x + 2 > y \\
& 2x - 4 < y \\
& 2x + 4 > y \\
& -\frac{1}{2}x - 2 < y \\
& -\frac{1}{2}x + 2 > y \\
& -2x - 4 < y \\
& -2x + 4 > y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & ((\sin x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - y - (\sin x)^2 > 0 \\
& \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} < y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & \left| \frac{1}{x} \right| > y \\
& -\frac{1 + 7x^2}{x^2y} > -\frac{y + 7}{y} \\
& |x| + y < 5
\end{aligned}$$

8. Berechne für die Ungleichung den Flächeninhalt der Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}
(2y - 3)^2 + (3y + 2)^2 + y - 10 &\geq \left| \frac{4x + 4(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2})^2 - 9}{x} \right| + 13y^2 \\
y &\leq -1
\end{aligned}$$

9. Für welches  $a$  ist der Flächeninhalt der Lösungsmenge gleich 2?

$$\begin{aligned}
y &\geq 2 \\
-|x| + a &\leq y
\end{aligned}$$

# 6 Vollständige Induktion

Autor: Katja Matthes Überarbeitung: Sebastian Nielebock

## 6.1 Prinzip

Vollständige Induktion ist eine mathematische Beweismethode. Das Ziel der vollständigen Induktion besteht darin, die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen  $n \geq \in \mathbb{N}_0$  (Induktionsanfang) nachzuweisen.

### 1. Induktionsanfang

Man zeigt, dass die Aussage für die natürliche Zahl  $n_0 = 1$  (oder auch  $n_0 = 0, 2, 3, \dots$ ) gilt.

### 2. Induktionsschritt

- Induktionsvoraussetzung: Es wird angenommen, dass die Aussage für eine feste natürliche Zahl  $n$  gilt.
- Induktionsbehauptung: Es wird behauptet, dass die Aussage unter der Voraussetzung auch für die nachfolgende natürliche Zahl  $n + 1$  gilt.
- Induktionsbeweis: Die Induktionsbehauptung wird unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung bewiesen.

### 3. Schlussfolgerung

Aus dem Verbund von Induktionsanfang und Induktionsschritt folgt, dass die Aussage tatsächlich für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$  gilt.

## 6.2 Einschub: Das Summenzeichen

Viele Aufgaben in der Induktion sind mit Summenzeichen formuliert. Um einen Teil der Beweise besser führen zu können, ist es notwendig einige Regeln zu kennen.

### 6.2.1 Allgemein

Das Summenzeichen stellt eine Verkürzung für die Addition dar:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

### 6.2.2 Letzten Index ausklammern

Eine sehr nützliche Regel zum Induktionsbeweis ist das Ausklammern des letzten Index. Für viele Beweise lässt sich so der Induktionsschritt leicht zeigen:

$$\sum_{i=l}^{n+1} a_i = \left( \sum_{i=l}^n a_i \right) + a_{n+1}$$

### 6.2.3 Assoziativgesetz

$$\sum_{i=l}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=l}^n a_i$$

## 6.3 Beispielaufgabe

Zeige: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

### 6.3.1 Induktionsanfang

Wir zeigen, dass die Aussage richtig ist für  $n_0 = 1$ .

$$\sum_{k=1}^1 2^k = 2^1 = 2 = 2(2^1 - 1)$$

(wahre Aussage)

### 6.3.2 Induktionsschritt

**Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass die Annahme gültig ist für ein festes  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

**Induktionsbehauptung:** Wir behaupten, dass dann die Aussage auch für die nachfolgende Zahl  $n + 1$  ( $n \mapsto n + 1$ ) gilt.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2(2^{n+1} - 1)$$

**Induktionsbeweis:** Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung wird die linke Seite der Behauptung in deren rechte Seite umgewandelt.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} && \text{|nach Induktionsvoraussetzung} \\
 &= 2(2^n - 1) + 2^{n+1} && \text{|Potenzgesetze} \\
 &= 2(2^n - 1) + 2 \cdot 2^n && \text{|2 ausklammern} \\
 &= 2(2^n - 1 + 2^n) && \text{|zusammenfassen} \\
 &= 2(2 \cdot 2^n - 1) && \text{|Potenzgesetze} \\
 &= 2(2^{n+1} - 1)
 \end{aligned}$$

### 6.3.3 Induktionsschluss

Damit ist durch das Prinzip der vollständigen Induktion die Induktionsbehauptung und damit auch die Aussage:

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen.

qed.

## 6.4 Aufgaben

### Gleichungen

1. Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Beweise: Die Summe der ersten  $n$  geraden natürlichen Zahlen ist gleich  $n^2 + n$ , d.h.

$$\sum_{k=1}^n 2k = n^2 + n$$



4. Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

5. Die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$  soll bestimmt werden. Stelle eine Vermutung auf und beweise diese durch vollständige Induktion.

6. Die Summe von  $4 + 8 + 12 + \dots + 4n$ , also der ersten  $n$  durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen, soll bestimmt werden. Stelle eine Vermutung auf und beweise diese durch vollständige Induktion.

7. Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Summenformel (mit  $0 < q < 1$ )

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

8. Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

9. Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

10. Beweise:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

### Teilbarkeitsprobleme

1. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist 8 ein Teiler von  $9^n - 1$
2. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist 6 ein Teiler von  $7^n - 1$
3. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist  $a - 1$  ein Teiler von  $a^n - 1$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $a > 1$
4. Beweise, dass der Term  $n^3 + 6n^2 + 14n$  für alle natürlichen Zahlen ein Vielfaches von 3 ist.
5. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist 3 ein Teiler von  $2^{2n} - 1$
6. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist 6 ein Teiler von  $n^3 - n$
7. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  ist  $3n^2 + 9n$  durch 6 teilbar.

### Ungleichungen

1. Beweise die **Bernoulli-Ungleichung**: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \geq -1$  gilt:  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
2. Bestimme die kleinste natürliche Zahl  $n_0$ , für die folgende Ungleichung richtig ist:  $n^2 + 10 < 2^n$ . Beweise, dass die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$  richtig ist.
3. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 3$  gilt:  $n^2 > 2n + 1$
4. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 5$  gilt:  $2^n > n^2$
5. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

6. Beweise: Für alle natürlichen Zahlen  $n > 2$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$$

# 7 Funktionen

Autor: Gerhard Gossen

Eine Funktion  $f$  ist eine Abbildung, die einem Wert aus dem *Definitionsbereich*  $D(f)$  genau einen Wert aus dem *Wertebereich*  $W(f)$  zuordnet. Die übliche Darstellung ist  $f : X \rightarrow Y$  (sprich:  $f$  ist eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$ ), wobei  $X$  die Definitionsmenge ( $D(f) \subseteq X$ ) und  $Y$  die Zielmenge ist ( $W(f) \subseteq Y$ ). Definitions- und Zielmenge sind oft  $\mathbb{R}$  (die reellen Zahlen).

Verbreitete Funktionen sind z.B. Geraden ( $f(x) = m \cdot x + n$ ), Polynome ( $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ), die trigonometrischen Funktionen ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ , siehe Abschnitt 7.1) oder Exponentialfunktionen ( $a^x$ , siehe Abschnitt 7.2). Abbildung 7.1 zeigt die Graphen einiger Funktionen.

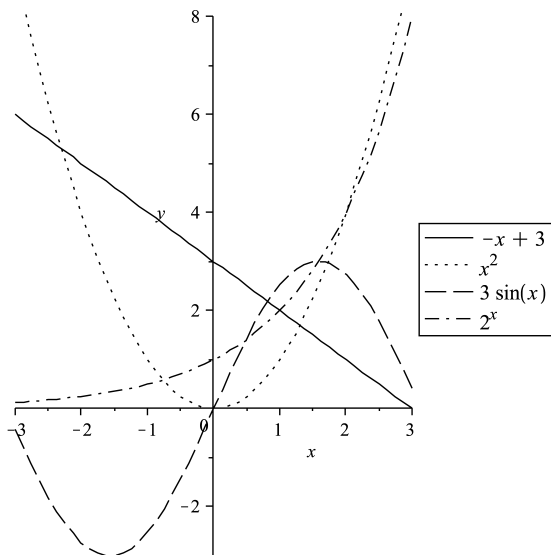


Abbildung 7.1: Bekannte Funktionen

Alle Funktionen, die wir im Vorkurs behandeln, sind Funktionen mit *einer Veränderlichen*, also Funktionen, die von einer einzigen Variable (meist  $x$ ) abhängen. Die Eigenschaften einer Funktion kann man über eine *Kurvendiskussion* (siehe Abschnitt 7.3) herausbekommen. Zuerst werden wir aber zwei wichtige Funktionsfamilien vorstellen: die trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen, Abschnitt 7.1) und

die Exponentialfunktionen (Abschnitt 7.2).

## 7.1 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  sind die Winkelfunktionen. Sie sind für Winkel im Bogenmaß definiert (z. B.  $x = \frac{\pi}{2}$ ). Winkel im Gradmaß (z. B.  $x = 90^\circ$ ) können eindeutig ins Bogenmaß umgerechnet werden ( $90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$ ). Deswegen ist auch die Schreibweise  $\sin 90^\circ$  möglich.

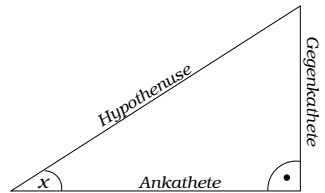
### 7.1.1 Definition

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

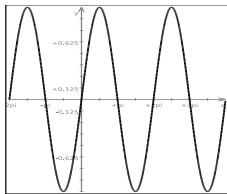
$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothense}}$$

$$\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothense}}$$

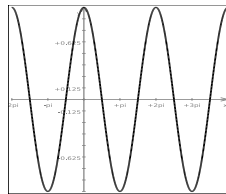
$$\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$



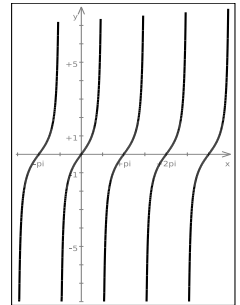
Diese Definitionen lassen sich verallgemeinern, so dass die Funktionen für alle reellen Zahlen definiert sind (im rechtwinkligen Dreieck:  $0 \leq x \leq 90^\circ$ ). Damit ergeben sich diese Funktionen:



$\sin x$



$\cos x$



$\tan x$

Man sieht, dass der Cosinus gegenüber dem Sinus nur um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben ist, es gilt also:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Beispiel:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) = -1$$

### 7.1.2 Periodizität und Symmetrie

Alle Winkelfunktionen sind periodisch, d. h. alle Werte wiederholen sich in regelmäßigen Abständen. Es gilt also für jede ganze Zahl  $k$ :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

(Zur Erinnerung;  $2\pi \equiv 360^\circ$ , deswegen entspricht  $2k\pi$  genau  $k$  Vollkreisen).

Beispiele:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \dots$$

$$\cos(\pi) = \cos(3\pi) = \cos(5\pi) = \cos(7\pi) = \dots$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \dots$$

Die Sinus- und Cosinusfunktion sind symmetrisch, der Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung, der Cosinus achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse. Zusammen mit der Periodizität folgen daraus folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} \sin(\pi - x) = \sin x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x & \cos(\pi + x) = -\cos x & \tan(\pi + x) = \tan x \\ \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \end{array}$$

Das Vorzeichen ist also vom Quadranten abhängig, in dem sich  $x$  befindet. Diesen Zusammenhang zeigt Abbildung 7.2.

Die Werte für  $\sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  reichen damit aus, um alle Werte für  $\sin$  und  $\cos$  bestimmen. Die wichtigsten Werte sind in der folgenden Tabelle.

$x$ im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x$ im Gradmaß	0	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

### 7.1.3 Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen zu  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\tan$  sind  $\arcsin$ ,  $\arccos$  und  $\arctan$  (sprich: *arcus sinus*, *arcus cosinus* und *arcus tangens*). Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind (z. B. gilt  $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ ), kann es keine eindeutige Umkehrfunktion geben (in diesem Beispiel: ist  $\arcsin(0)$  gleich 0 oder  $2\pi$ ?). Deswegen sind

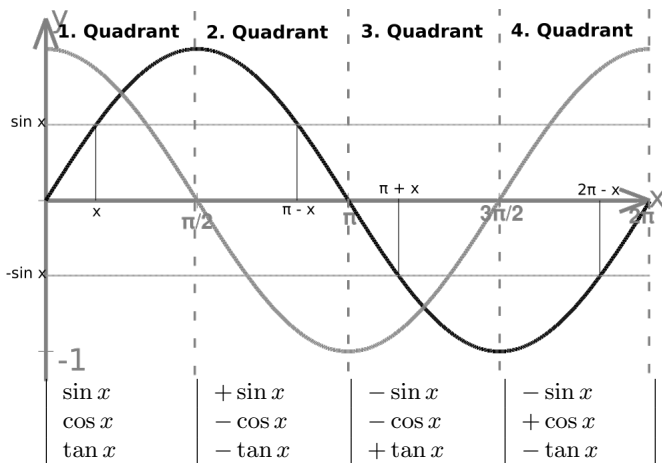


Abbildung 7.2: Symmetrie von Sinus und Cosinus

die Funktionen nur auf einem bestimmten Bereich umkehrbar. Diese Bereiche sind:

$$y = \sin x \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin y \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$y = \cos x \quad 0 \leq x \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos y \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$y = \tan x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan y \quad y \in \mathbb{R}$$

### 7.1.4 Trigonometrischer Pythagoras

Für alle  $x$  gilt:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Diese Aussage heißt auch *trigonometrischer Pythagoras*. Damit kann manchmal ein Term vereinfacht werden.

### 7.1.5 Additionstheoreme

Die Winkelfunktionen haben unter anderem diese wichtigen Eigenschaften:

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \sin(120^\circ) &= \sin(60^\circ + 60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) && \text{(wende Additionstheorem an)} \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} && \text{(wandle cos in sin)} \\
 &= \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Probe über Symmetrie:

$$\begin{aligned}
 \sin(120^\circ) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{(mit 7.1.2)} \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

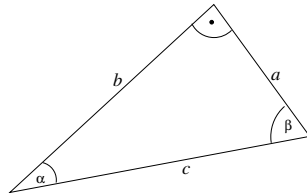
### 7.1.6 Aufgaben

1. Berechne mit Hilfe der Tabelle in Abschnitt 7.1.2 folgende Werte:

- |                          |                           |                          |                            |
|--------------------------|---------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $\sin\frac{2\pi}{3}$  | f) $\sin\frac{7\pi}{3}$   | k) $\cos\frac{\pi}{3}$   | p) $\cos\frac{4\pi}{6}$    |
| b) $\sin\frac{5\pi}{6}$  | g) $\sin\frac{29\pi}{6}$  | l) $\cos\frac{\pi}{2}$   | q) $\cos\frac{7\pi}{3}$    |
| c) $\sin\pi$             | h) $\sin -\frac{3\pi}{4}$ | m) $\cos\frac{11\pi}{6}$ | r) $\cos -\frac{11\pi}{4}$ |
| d) $\sin\frac{3\pi}{2}$  | i) $\cos\frac{\pi}{6}$    | n) $\cos\frac{3\pi}{4}$  | s) $\tan\frac{\pi}{6}$     |
| e) $\sin\frac{11\pi}{6}$ | j) $\cos\frac{\pi}{4}$    | o) $\cos\frac{2\pi}{3}$  | t) $\tan -\frac{\pi}{3}$   |

2. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel. Die Bezeichnungen entsprechen der nebenstehenden Zeichnung.

$\alpha$	$\beta$	$a$	$b$	$c$
			1	$\sqrt{2}$
		2		4
		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		$\frac{1}{2}$
		4	3	
$\frac{\pi}{6}$		1		
	$\frac{\pi}{3}$		2	



3. \* Leite folgende Aussage her:

$$\sin(4\alpha) = 4(\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha)$$

4. \* Leite her, dass folgende Aussage gilt:

$$\cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1$$

5. \* Eine Kugel mit dem Radius 1 umschließt einen Würfel. Bestimme die maximale Seitenlänge des Würfels.

## 7.2 Exponentialfunktionen und Logarithmus

### 7.2.1 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form  $f(x) = a^x$ , wobei  $a$  eine konstante Zahl  $> 0$  ist. Diese Funktionen haben einige gemeinsame Eigenschaften:

- $f(x) > 0$ , d. h. insbesondere die Funktion hat keine Nullstelle
- $f(0) = 1$ , da  $a^0 = 1$  für alle  $a$

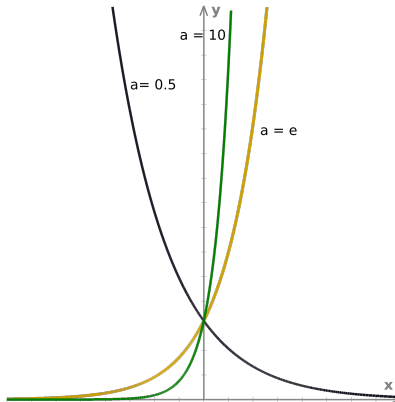


Abbildung 7.3: Graph der Funktion  $a^x$ , mit  $a \in \{e, 10, \frac{1}{2}\}$ .

Die Funktion hat abhängig von  $a$  folgende Form:

$a > 1$  streng monoton wachsend, für  $x \rightarrow -\infty$  geht  $f(x)$  gegen 0.

$0 < a < 1$  streng monoton fallend, für  $x \rightarrow \infty$  geht  $f(x)$  gegen 0.

$a = 1$  die Funktion ergibt konstant 1 ( $f(x) = 1^x$ ).

Eine spezielle Exponentialfunktion ist die  $e$ -Funktion  $f(x) = e^x$ , mit der sich viele natürliche Vorgänge beschreiben lassen.  $e = 2,718281828459\dots$  ist die *Eulersche Zahl*. Die  $e$ -Funktion hat die Eigenschaft, dass  $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = (e^x)^{(n)}$ , d. h. alle Ableitungen der Funktion sind gleich der Funktion.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktionen ist der Logarithmus:

$$y = a^x \iff x = \log_a y.$$



## 7.2.2 Logarithmus

Der Logarithmus  $\log_a b$  (sprich: Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$ ) ist die Zahl  $c$ , für die  $a^c = b$  gilt. Der Logarithmus ist damit die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Wichtige Logarithmen sind:

**Natürlicher Logarithmus** Logarithmus zur Basis  $e$ :  $\log_e x = \ln x$

**Dekadischer Logarithmus** Logarithmus zur Basis 10:  $\log_{10} x = \lg x$

**Binärer Logarithmus** Logarithmus zur Basis 2:  $\log_2 x = \text{ld } x$

## 7.2.3 Logarithmusfunktion

Der Graph der Logarithmusfunktion (Abbildung 7.3) verhält sich ähnlich wie der Graph der Exponentialfunktion: Abhängig von  $a$  ist der Graph entweder streng monoton fallend ( $0 < a < 1$ ) oder streng monoton steigend ( $a > 1$ ). Die Funktion ist nur für positive Zahlen definiert, der Grenzwert für  $x \rightarrow 0$  ist  $\pm\infty$ . Der Funktionswert  $\log_a(1)$  ist 0, unabhängig von  $a$ .

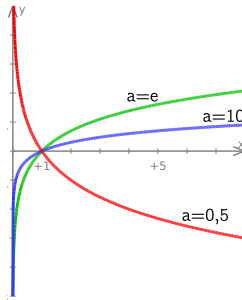


Abbildung 7.4: Graph der Funktion  $\log_a x$ , mit  $a \in \{e, 10, \frac{1}{2}\}$ .

Für große Werte von  $x$  (und  $n > 0$ ) gilt:  $\log_a(x) < n \cdot x$ , die Logarithmusfunktion wächst also langsamer als eine lineare Funktion.

## 7.2.4 Logarithmengesetze

$$\begin{aligned}\log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\ \log_a \frac{u}{v} &= \log_a u - \log_a v \\ \log_a u^r &= r \cdot \log_a u\end{aligned}$$

### 7.2.5 Basiswechsel

Ein Logarithmus zu einer ungewöhnlichen Basis  $a$  kann berechnet werden, indem dieser auf eine andere Basis  $b$  gebracht wird:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ z. B. } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Dies ist nützlich, da die meisten Taschenrechner nur die Logarithmen zur Basis  $e$  (Taste **ln**) und 10 (Taste **log**) berechnen können. Alle anderen Logarithmen müssen auf diese Basen umgerechnet werden.

### 7.2.6 Aufgaben

1. Löse nach  $x$ :

a)  $1 = e^x$

d)  $e = \frac{e^x}{e}$

g)  $0 = \log_{42} x$

b)  $8 = 2^x$

e)  $9 = e^{cx}$

h)  $0 = 5 \log_5 x$

c)  $3 = 5e^x$

f)  $3 = \log_2 x$

i)  $9 = 3 \ln e^x$

2. Vereinfache:

a)  $\lg 2 + \lg 5$

e)  $\frac{1}{2} \log_7 9 - \frac{1}{4} \log_7 81$

b)  $\lg 5 + \lg 6 - \lg 3$

f)  $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 3$

c)  $3 \ln a + 5 \ln b - \ln c$

g)  $2 \log_2(4-x) + 4 = \log_2(x+5) - 1$

d)  $2 \ln v - \ln v$

h)  $\log_5 x = \log_5 6 - 2 \log_5 3$

3. Das Wachstum von Bakterienkulturen lässt sich mit Hilfe der  $e$ -Funktion beschreiben. Die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt  $t$  ist eine Funktion  $N(t)$ , die abhängig ist von der anfänglichen Anzahl der Bakterien (also der Wert  $N_0 := N(0)$ ) und der Wachstumsrate  $k$  des Bakteriums (konstant). Es entsteht damit die Formel:  $N(t) = N_0 e^{kt}$ .

Für  $N_0 = 100, k = 0,2$ :

a) Wieviele Bakterien gibt es zum Zeitpunkt  $t = 5$  (10, 100)?

b) Zu welchem Zeitpunkt  $t$  gibt es 500 (10000) Bakterien?

## 7.3 Kurvendiskussion, Differentiation, Integration

Autor: Andreas Zöllner Überarbeitung: Gerhard Gossen

Eine Kurvendiskussion hilft uns eine Funktion zu „verstehen“. Wir bekommen Informationen über die Form des Graphen (z. B. Anzahl und Lage von Extrema und Wendepunkten) und über wichtige Punkte (z.B. Nullstellen) der Funktion.

Eine Kurvendiskussion hat eine feste Reihenfolge von Schritten. Einige davon können von Mathematik-Programmen durchgeführt werden, aber bei komplexeren Funktionen ist der eigene Hirnschmalz gefragt. Die Schritte sind: Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, (globale) Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen, Polstellen und Asymptoten bestimmen. Mithilfe dieser Daten kann der Graph der Funktion skizziert werden.

### 7.3.1 Definitionsbereich

Als erstes sollte man sich über den Definitionsbereich  $D(f)$  der Funktion  $f$  im Klaren sein: Für welche Werte  $x \in \mathbb{R}$  ist  $f(x)$  überhaupt definiert? Die Funktion  $\frac{1}{x-1}$  ist beispielsweise für  $x = 1$  nicht definiert (Division durch 0!), die Logarithmusfunktion ist nur für positive Werte definiert.

Isolierte Punkte, an denen  $f$  nicht definiert ist, heißen **Definitionslücken**. Hierbei unterscheidet man verschiedene Arten von Definitionslücken, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.

Der Definitionsbereich wird als Menge angegeben. Beispiele für verschiedene Bereich gibt Tabelle 7.1.

Definitionsbereich	Beschreibung
$D(f) = \mathbb{R}$	Der Definitionsbereich ist die gesamte Definitionsmenge.
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{c\}$	Die Funktion hat eine Definitionslücke an der Stelle $c$ .
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \wedge x \geq c\}$	$f$ ist nur in den Intervallen $(a, b)$ und $[c, \infty)$ definiert.

Tabelle 7.1: Beispiele für Definitionsbereiche

### 7.3.2 Wertebereich

Der Wertebereich  $W(f)$  sind all diejenigen Werte, welche die Funktion  $f$  annimmt, also alle Werte von  $f(x)$  mit  $x \in D(f)$ . Der Wertebereich ist analog zum Definitionsbereich als eine Menge angegeben.

Der Wertebereich einer Funktion lässt sich meist über Betrachtungen zur Stetigkeit, der Extrema, der Monotonie und der Asymptoten ermitteln.

### 7.3.3 Nullstellen

Eine Stelle  $x_0 \in D(f)$  heißt eine **Nullstelle** der Funktion  $f$ , wenn

$$f(x_0) = 0,$$

gilt.

Zur Bestimmung der Nullstellen müssen wir daher alle Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0$$

finden.

### 7.3.4 Einschub: Ableiten einer Funktion

Da für die Betrachtung der Extrema und Wendepunkte als notwendige Kriterien die Ableitung der Funktion benötigt wird, wird im Folgenden kurz erläutert was die Ableitung ist und wie diese berechnet wird. Die erste Ableitung  $f'$  gibt die Steigung der Tangenten an den Graphen von  $f$  an. Links von einem Maximum ist die Steigung positiv, rechts davon ist sie negativ (siehe Abb. 7.5). Hat die Ableitung den Wert 0, so entspricht dies einer Tangenten mit der Steigung 0, also einer horizontalen Gerade. Bei einem Minimum wechselt die Steigung der Tangenten entsprechend von negativ zu positiv.

#### Ableitungsregeln

1. Faktorregel:  $c \cdot f(x) (c \in \mathbb{R}, \text{konstant}) \Rightarrow c \cdot f'(x)$
2. Summenregel:  $f(x) + g(x) \Rightarrow f'(x) + g'(x)$
3. Produktregel:  $f(x) \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Quotientenregel:  $\frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0) \Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. Kettenregel:  $f(g(x)) \Rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$

#### wichtige Ableitungen

Funktion	Ableitung
$c$	0
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

### 7.3.5 Einschub: Integrieren einer Funktion

Die Umkehrfunktion der Ableitung ist das Integrieren. Es wird also eine Funktion  $F$  gesucht, deren Ableitung die Funktion  $f$  ergibt, also:  $F' = f$ . Diese Funktion  $F$  heißt dann Stammfunktion zu  $f$  und man schreibt auch  $\int f = F$ . Ist dieses Integral generell für die Funktion  $f$  gesucht, dann spricht man auch von einem *unbestimmten Integral*. Wird jedoch ein bestimmtes Intervall der Integration im Definitionsbereich gesucht, so nennt man dies ein *bestimmtes Integral*. Dieses bestimmte Integral entspricht dann dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im Bereich dieses Intervalls. Zur Berechnung des bestimmten Integrals wird ebenso die Stammfunktion benötigt und in dieser dann eingesetzt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

#### Integrationsregeln

1. Faktorregel:  $\int (c \cdot x) dx$  ( $c \in \mathbb{R}$ , konstant)  $\Rightarrow c \cdot \int f(x) dx$
2. Potenzregel:  $\int x^n dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
3. Summenregel:  $\int (f(x) + g(x)) dx \Rightarrow \int f(x) dx + \int g(x) dx$

#### wichtige Integrale

Funktion	Stammfunktion
1	$x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$e^x$	$e^x + c$
$\ln x$	$x \cdot (\ln x - 1) + c$

### 7.3.6 Extrema

Um die Extrema einer Funktion  $f$  bestimmen zu können, müssen die ersten beiden Ableitungen von  $f$  existieren. Eine Stelle  $x_0$  ist ein Extremum von  $f$ , wenn gilt:

1.  $f'(x_0) = 0$  (*notwendige Bedingung*)
2.  $f''(x_0) \neq 0$  (*hinreichende Bedingung*)

Bei  $f''(x) > 0$  liegt ein lokales Minimum, bei  $f''(x) < 0$  ein lokales Maximum vor.

Die **globalen Extrema** erhält man, indem man zusätzlich das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs in Betracht zieht. Also z. B. falls  $D(f) = \mathbb{R}$  gilt, dann sind dies die Werte  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

### 7.3.7 Wendepunkte

An einem *Wendepunkt* ändert sich das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen, der Graph wechselt also von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt.

Das notwendige Kriterium für eine Wendestelle bei  $x_0$  ist, dass der Wert der zweiten Ableitung Null wird:  $f''(x_0) = 0$ . Zusätzlich muss noch eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

**Der Wert der dritten Ableitung ist ungleich Null:**  $f'''(x_0) \neq 0$ . Dabei muss aber die dritte Ableitung existieren.

**Das Vorzeichen der zweiten Ableitung wechselt in  $x_0$ :** Falls keine dritte Ableitung existiert oder ihre Berechnung zu aufwändig ist, muss man das Vorzeichen auf beiden Seiten von  $x_0$  vergleichen.

Die zweite Ableitung gibt die Änderung der Steigung an. Wenn die zweite Ableitung positiv ist, wird die Steigung größer, der Graph macht also eine Linkskurve. Eine Rechtskurve entsteht dementsprechend bei einer sinkenden Steigung der Tangente, also einer negativen zweiten Ableitung.

Eine Spezialform eines Wendepunktes ist der *Sattelpunkt*, bei dem sowohl die erste als auch die zweite Ableitung Null ist. Ein Beispiel dafür zeigt Abbildung 7.6. Hier sieht man, dass es zur Bestimmung der Extrema nicht ausreicht, eine Nullstelle der ersten Ableitung zu finden, es muss auch die zweite Ableitung überprüft werden.

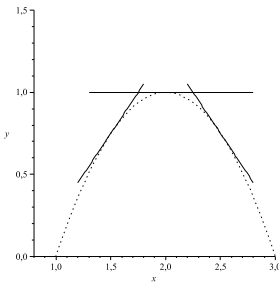


Abbildung 7.5: Tangenten der Funktion  $-(x-2)^2 + 1$  an den Stellen  $\frac{3}{2}$ ,  $2$ ,  $\frac{5}{2}$

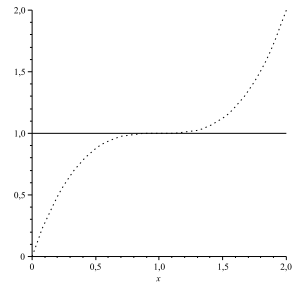


Abbildung 7.6: Sattelpunkt der Funktion  $(x-1)^3 + 1$  an der Stelle  $x = 1$

### 7.3.8 Verhalten im Unendlichen, Polstellen, Asymptoten

Unter dem Verhalten der Funktion  $f$  im Unendlichen versteht man die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

sofern diese existieren.

Die Asymptoten beschreiben das Verhalten der Funktion  $f$  im Unendlichen und an Polstellen (eine Art von Definitionslücken) genauer. Der Begriff „asymptotisch“ bedeutet dabei „sich annähernd“. Eine **Asymptote** der Funktion  $f$  ist eine lineare Funktion

$$y = mx + n \quad \text{für gewisse } m, n \in \mathbb{R},$$

der sich die Funktion  $f$  annähert.

### 7.3.9 Graph der Funktion

Mit Hilfe dieser Informationen kann man den Graphen der Funktion jetzt gut zeichnen. Dazu zeichnet man Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und eventuelle Asymptoten auf und hat damit schon die Grobstruktur gegeben. Falls nötig, kann man noch die Funktionswerte für einzelne Stellen berechnen, um etwa die Stärke der Krümmung zu erkennen.

### 7.3.10 Aufgaben

1. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a)  $6x^2 - 5x + 7$

d)  $(x^2 + 1)(x + 5)$

g)  $(2x - 3)^5$

b)  $25x^4$

e)  $(x - 2)e^x$

h)  $\sin(2x)$

c)  $x(x - 7)$

f)  $\ln(x^3 - 9)$

i)  $\frac{1}{x^2 - 9}$

2. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

a)  $\int (3x^2) dx$

c)  $\int (x - 4)(x + 1) dx$

e)  $\int (e^{2x}) dx$

b)  $\int (5x^3 - 2) dx$

d)  $\int \frac{2}{x} dx$

3. Berechne die folgenden bestimmten Integrale (Fläche unterhalb des Graphen):

a)

b)

$$\int_0^2 (3x^2) dx$$

$$\int_1^5 (x + 1) dx$$

4. Führe eine vollständige Kurvendiskussion für diese Funktionen durch:

a)  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

b)  $g(x) = \frac{3x^2 - 12x}{4x^2 - 2}$

# 8 Vektoren

Autor: Gerhard Gossen Überarbeitung: Marko Rak, Melanie Pflaume

## 8.1 Definition

Der Vektor

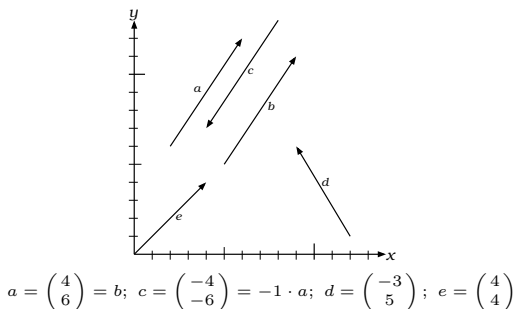
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist ein  $n$ -dimensionaler Vektor. Die *Komponenten*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sind reelle Zahlen. In der Vorlesung wird statt  $\vec{x}$  meist nur  $x$  geschrieben.

Geometrisch interessant sind Vektoren der Dimension 2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und Dimension 3: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sie können als Pfeile in eine bestimmte Richtung dargestellt werden. Man kann sie auch als *Verschiebung* interpretieren. Der Nullvektor  $\vec{0}$  bzw.  $0$  ist der Vektor, bei dem alle Komponenten  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $0$  sind. Der *Ortsvektor* eines Punktes  $P$  ist der Vektor zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und  $P$ . Ein *Skalar* ist eine einzelne Zahl vom selben Typ wie  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .





## 8.2 Operationen

### 8.2.1 Addition und Subtraktion

Zwei Vektoren werden addiert, indem die einzelnen Komponenten addiert werden:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion ist analog:

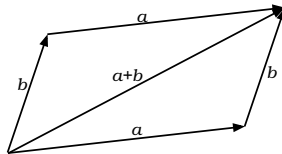
$$x - y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Geometrisch gesehen entspricht die Addition der Vektoren  $a$  und  $b$  der Verschiebung, die durch Verschieben zuerst in Richtung  $a$  und danach in Richtung  $b$  entsteht. Wie man in der Zeichnung erkennt, ist die Addition *kommutativ*, d. h.  $a + b = b + a$ .



### 8.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem jede einzelne Komponente mit dem Skalar multipliziert wird:

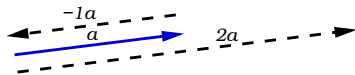
$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit dem Skalar 0 ergibt immer den Nullvektor.

Beispiele:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geometrisch entspricht die Multiplikation einer *Streckung* um den Faktor  $\lambda$ .



Vektor  $a$ , skaliert mit  $\lambda = -1$  (oben) und  $\lambda = 2$  (unten).

### 8.3 Linearkombination

Jeder Vektor  $b$ , der sich als Summe  $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$  darstellen lässt, heißt *Linearkombination* der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Die  $\lambda_i$  sind reelle Zahlen.

### 8.4 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  sind *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  hat. Ansonsten sind die Vektoren *linear abhängig*.

Wenn zwei oder mehr Vektoren linear abhängig sind, so kann ein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

Beispiel: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, da

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

## 8.5 Betrag eines Vektors

Der Betrag  $|a|$  eines Vektors entspricht der Länge dieses Vektors. Er wird berechnet als

$$|a| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Beispiele:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1 + 49 + 1} = \sqrt{64} = 8$$

## 8.6 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt  $(a, b)$  der beiden Vektoren  $a$  und  $b$  ist die reelle Zahl

$$(a, b) = |a||b| \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen den Vektoren ist (andere Schreibweise:  $a \cdot b$ ).

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $n$ 'ter Ordnung lässt sich auch folgendermaßen berechnen:

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Meist will man überprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind. Mit  $\cos(90^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  ergibt sich:

$$\frac{(a, b)}{|a||b|} = 0$$

Beispiele:

1. Winkel zwischen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 0 \\ \alpha &= \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

2. Winkel zwischen  $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(a, b)}{|a||b|} \\ &= \frac{-40 + (-10) + (-10)}{\sqrt{24}\sqrt{150}} = \frac{-60}{\sqrt{4 \cdot 6}\sqrt{25 \cdot 6}} \\ &= -\frac{60}{2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6}} = -\frac{60}{60} = -1 \\ \alpha &= \arccos(-1) = \pi = 180^\circ \end{aligned}$$

## 8.7 Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt* zweier dreidimensionaler Vektoren  $a$  und  $b$  (beide ungleich dem Nullvektor) ist ein neuer Vektor. Dieser ist orthogonal zu  $a$  und  $b$ . Schreibweise:  $a \times b$ . Das Kreuzprodukt für 3-dimensionale Vektoren wird so berechnet:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Merkhilfe: Der Wert an der Stelle  $\bullet$  ergibt sich aus  $(1) \cdot (2) - (3) \cdot (4)$ , wobei  $(1), \dots, (4)$  aus der Formel zu entnehmen sind.

$$\begin{pmatrix} \bullet \\ \phantom{\bullet} \\ \phantom{\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \phantom{\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phantom{\bullet} \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 8.8 Aufgaben

1. Gegeben sind:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne:

a)  $a + b - c + d$

d)  $a - \frac{1}{2}c + (-3)b + 2d$

b)  $d - c - b - a$

e)  $2a - b + 5c - d$

c)  $3a - 2b + c$

f)  $3a - 5b + 4c + 2d$

2. Berechne die Länge der Vektoren:

a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

f)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Bestimme das Skalarprodukt:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Bestimme den eingeschlossenen Winkel:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

5. Berechne das Kreuzprodukt:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

6. Überprüfe, ob die Vektoren linear abhängig sind. In diesem Fall stelle einen der Vektoren als Linearkombination der anderen dar. (Hinweis: Nutze den Gauss-Algorithmus)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{f) } \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{g) } \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix} & \text{h) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{d) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{i) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{e) } \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} & \end{array}$$

# 9 Matrizen

**Autor:** Martin Glauer

Eine Matrix ist nichts anderes, als eine tabellarische Anordnung von Elementen aus einer Menge<sup>1</sup>  $K$  mit einer Multiplikation  $\cdot$  und einer Addition  $+$ . Sie finden in vielen Bereichen der Informatik Anwendung, um beispielsweise Rotationen von Objekten berechnen zu können.

Eine Matrix mit  $m$  Zeilen (horizontal) und  $n$  Spalten (vertikal) wird auch als  $m \times n$ -Matrix (sprich: 'm Kreuz n-Matrix') bezeichnet und entsprechend auch der Raum, der alle  $m \times n$ -Matrizen enthält mit  $K^{m \times n}$  notiert. Analog werden auch die einzelnen Einträge einer Matrix  $A$  in der Form  $A_{\text{Zeile,Spalte}}$  angegeben:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

## 9.1 Skalarmultiplikation

Eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  kann (analog zum Skalarprodukt bei Vektoren) mit einem Element  $\lambda$  aus dem Raum, aus dem ihre Einträge stammen, multipliziert werden. Hierfür werden alle Einträge der Matrix mit diesem Element multipliziert

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot A_{1,1} & \cdots & \lambda \cdot A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot A_{m,1} & \cdots & \lambda \cdot A_{m,n} \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Diese Menge muss einen Körper bilden. Eine Struktur, die du im Laufe des Studiums noch kennenlernen wirst. Informell gesagt ist ein Körper eine Menge derart, dass die Operationen  $+$  und  $\cdot$  ähnlich zu Addition und Multiplikation in den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  (also auch entsprechend umkehrbar!) sind.

## 9.2 Addition

Um zwei Matrizen zu addieren, werden die Einträge, die an den gleichen Stellen stehen, addiert:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \cdots & A_{1,n} + B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} + B_{m,1} & \cdots & A_{m,n} + B_{m,n} \end{pmatrix}$$

### 9.2.1 Rechenregeln

Für alle Matrizen  $A, B \in K^{m \times n}$  und Skalare  $\lambda \in K$  gilt:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

## 9.3 Transponation

Zu einer Matrix  $A \in K^{m \times n}$  ist die Transponierte  $A^T \in K^{n \times m}$  das Spiegelbild an der Hauptdiagonalen  $A_{1,1}, A_{2,2}, \dots, A_{n,n}$ : Ist beispielsweise  $m > n$  (hat also  $A$  mehr Zeilen als Spalten):

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{n,1} & \cdots & A_{m,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} & \cdots & A_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

### 9.3.1 Rechenregeln

Für alle Matrizen  $A, B$  und Skalare  $\lambda \in K$  gilt:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(A^T)^T = A$



## 9.4 Multiplikation

Will man für zwei Matrizen  $A \in K^{k \times m}$ ,  $B \in K^{m \times n}$  das Produkt  $C \in K^{k \times n}$  berechnen, so ist dies etwas komplexer:

$$C_{i,j} = \sum_{t=1}^m A_{i,t} \cdot B_{t,j}$$

*Wichtig!* Die Zahl der Spalten der linken Matrix muss mit der Zahl der Zeilen der rechten Matrix übereinstimmen. Außerdem ist die Multiplikation im Allgemeinen nicht umkehrbar (kommutativ):  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

### 9.4.1 Das Falk-Schema:

Das Falk-Schema (auch falksches Schema) bietet eine vereinfachte Darstellungsform in der beide Matrizen entsprechend der Form aus Abbildung 9.1 notiert werden.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \begin{pmatrix} \rightarrow B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \rightarrow B_{2,1} & \cdots & B_{2,n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rightarrow B_{m-1,1} & \cdots & B_{m-1,n} \\ \rightarrow B_{m,1} & \cdots & B_{m,n} \end{pmatrix} \\
 & & & \cdot & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 \begin{pmatrix} \leftarrow A_{1,1} & \leftarrow A_{1,2} & \cdots & \leftarrow A_{1,m-1} & \leftarrow A_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow A_{k,1} & \leftarrow A_{k,2} & \cdots & \leftarrow A_{k,m-1} & \leftarrow A_{k,m} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k,1} & \cdots & C_{k,n} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Abbildung 9.1: Das Falk-Schema

Zum Berechnen von  $C_{i,j}$  werden nur die  $i$ -te Zeile von  $A$  und die  $j$ -te Spalte von  $B$  betrachtet. Zunächst werden die innersten Einträge multipliziert ( $A_{i,m} \cdot B_{m,j}$ ), was iterativ mit allen Einträgen von innen nach außen wiederholt wird:  $A_{i,m-1} \cdot B_{m-1,j}$ ,  $A_{i,m-2} \cdot B_{m-2,j}$ ,  $\cdots$ ,  $A_{i,1} \cdot B_{1,j}$ . Der gesuchte Eintrag  $C_{i,j}$  ergibt sich dann aus der Summe dieser Produkte:

$$C_{i,j} = A_{i,m} \cdot B_{m,j} + A_{i,m-1} \cdot B_{m-1,j} + \cdots + A_{i,1} \cdot B_{1,j}$$

### 9.4.2 Rechenregeln

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

### 9.4.3 Matrizen als Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{cccccc} A_{1,1}x_1 & + & A_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & A_{1,n}x_n & = & b_1 \\ A_{2,1}x_1 & + & A_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & A_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1}x_1 & + & A_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & A_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

kann auch mit Hilfe von Vektoren und Matrizen dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

also:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

## 9.5 Inverse Matrix

Eine quadratische Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  gibt, dass gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $A^{-1}$  wird in diesem Fall die **zu  $A$  inverse Matrix** genannt. Eine Matrix, für die es keine Inverse gibt, heißt **nicht invertierbar**. Das Ermitteln der inversen Matrix erfolgt ähnlich zum Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{c}
 : A_{1,1} \text{ ---} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 A_{2,1} & \cdots & A_{2,n} & 0 & 1 & & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} & 0 & \cdots & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \cdot (-A_{2,1}) + \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 -1 & \cdots & \frac{A_{1,n}}{A_{1,1}} & \frac{1}{A_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\
 A_{2,1} & \cdots & A_{2,n} & 0 & 1 & & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} & 0 & \cdots & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & \cdots & \frac{A_{1,n}}{A_{1,1}} & \frac{1}{A_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & \cdots & A_{2,n} - \frac{A_{2,1} \cdot A_{1,n}}{A_{1,1}} & 0 - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 & & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} & 0 & \cdots & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \downarrow \\
 \vdots \\
 \downarrow \\
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & \cdots & 0 & B_{1,1} & \cdots & \cdots & B_{1,n} \\
 0 & 1 & & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\
 \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & 1 & B_{n,1} & \cdots & \cdots & B_{n,n}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Die Matrix auf der rechten Seite ist dann die inverse Matrix ( $B = A^{-1}$ ). **Wichtig:** Sollte im 1. Schritt eine 0 vorn stehen, so wird auf beiden Seiten diese Zeile mit einer Zeile weiter unten getauscht.

## 9.5.1 Beispiel

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Teile die erste Zeile durch 2

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Subtrahiere die erste Zeile von der 2. und subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der dritten Zeile

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Addiere die zweite Zeile zur dritten Zeile

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Multipliziere die dritte Zeile mit  $-1$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Nun liegt die sogenannte obere Dreiecksform vor. Nun muss das Verfahren von unten nach oben für die Elemente oberhalb der Diagonalen wiederholt werden. Subtrahiere die dritte Zeile von der zweiten Zeile

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Subtrahiere das Doppelte der dritten Zeile von der ersten Zeile

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Damit ist die Inverse:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 9.5.2 Rechenregeln

Für invertierbare Matrizen  $A, B$  gilt und  $\lambda \in K \setminus \{0\}$ :

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

## 9.6 Aufgaben

### 9.6.1 Aufgabe 1

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne:

1.  $A^T$ ,  $B^T$  und  $C^T$
2.  $B + C$
3.  $A \cdot B$
4.  $B \cdot A^T$
5.  $B^T \cdot A^T$
6. \*  $B^{-1}$  (falls möglich)
7. \*  $C^{-1}$  (falls möglich)

### 9.6.2 Aufgabe 2

Invertiere falls möglich die folgenden Matrizen:

1.  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

# 10 Komplexe Zahlen

**Autor:** Andreas Zöllner

## 10.1 Historie

Es gibt keine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$ , die die Gleichung

$$x^2 = -1$$

erfüllt. Zur Formulierung von Lösungen dieser Gleichung muss eine Zahlbereichserweiterung durchgeführt werden. Deshalb führte R. Bombioli Mitte des 16. Jahrhunderts das Symbol  $\sqrt{-1}$  ein, für das L. Euler später  $i$  schrieb. Diese **imaginäre Einheit** ist definiert als eine Lösung der Gleichung

$$i^2 = -1.$$

## 10.2 Kartesische Darstellung

Eine **komplexe Zahl**  $z$  ist ein Symbol der Form

$$z = x + iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Die **Menge der komplexen Zahlen** wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet,

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Aus dieser **kartesischen Darstellung**  $z = x + iy$  der komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ergibt sich die Veranschaulichung von  $z$  als geordnetes Paar bzw. zweidimensionaler Vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , d. h. als Punkt der **Gaußschen Zahlenebene**.

Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  bezeichnen

$$\operatorname{Re}(z) := x \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) := y$$

den **Realteil** bzw. **Imaginärteil** von  $z$ . Damit ist also

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z).$$

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist offensichtlich die Teilmenge der komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im}(z) = 0$ . Die komplexen Zahlen mit  $\operatorname{Re}(z) = 0$  heißen die *rein imaginären Zahlen*.

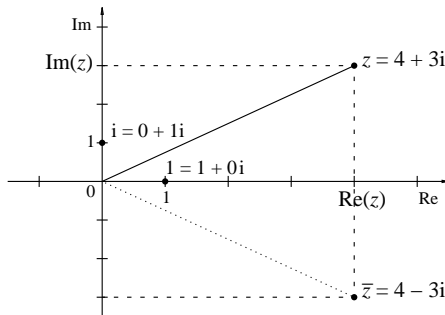
## 10.3 Rechenoperationen

Mit den komplexen Zahlen wird nach den in  $\mathbb{R}$  üblichen Rechenregeln gerechnet. Dabei wird  $i$  wie eine Variable behandelt, für die  $i^2 = -1$  gilt, d. h. beim Rechnen auftretende Potenzen  $i^k$  werden wieder auf  $i = i^1$  zurückgeführt, so dass wieder eine kartesische Darstellung einer komplexen Zahl als Ergebnis der Rechnung vorliegt.

Hierbei benötigt man noch das folgende Konzept: Die **konjugiert komplexe Zahl**  $\bar{z}$  zu  $z = x + iy$  ist die komplexe Zahl

$$\bar{z} = \overline{x + iy} := x - iy \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Grafisch interpretiert in der Gaußschen Zahlenebene entspricht dies der Spiegelung an der reellen Achse.



Es ergeben sich nun die grundlegenden Rechenoperationen. Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

- Addition. Sie erfolgt komponentenweise:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- Subtraktion. Sie erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

- Multiplikation. Es wird ausmultipliziert:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

- Division. Der Nenner wird reellwertig gemacht, indem der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert wird:

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

- Potenzieren mit Exponenten  $n \in \mathbb{N}$ . Es wird wiederholt multipliziert. Dabei gelten

$$(a + ib)^0 := 1 \quad \text{und} \quad (a + ib)^{n+1} = (a + ib) \cdot (a + ib)^n.$$

Wichtig sind hierbei die ganzzahligen Potenzen von  $i$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  ist

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ bei Teilung durch 4 den Rest 0 lässt} \\ i, & \text{falls } n \text{ bei Teilung durch 4 den Rest 1 lässt} \\ -1, & \text{falls } n \text{ bei Teilung durch 4 den Rest 2 lässt} \\ -i, & \text{falls } n \text{ bei Teilung durch 4 den Rest 3 lässt} \end{cases}$$

## 10.4 Eulersche Darstellung

Zu einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  betrachten wir deren Darstellung als Vektor der Gaußschen Zahlenebene in *Polarkoordinaten*,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit } r \geq 0 \text{ und } -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Der **Betrag**  $|z|$  von  $z$  ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = r \geq 0$$

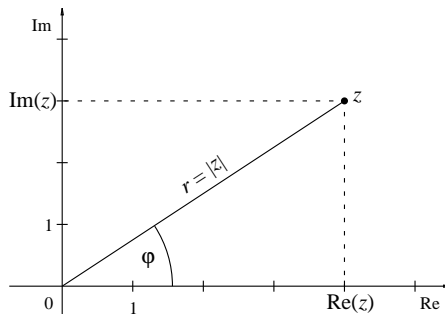
und das (**Haupt-**)**Argument**  $\arg(z)$  von  $z$  ist

$$\arg(z) = \varphi \quad \text{mit } -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Die Winkel  $\varphi + 2k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$  heißen die **Argumente** von  $z$ . Man beachte, dass sämtliche dieser Winkel ein und dieselbe komplexe Zahl  $z$  bestimmen, d. h.

$$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},$$

und dass das Hauptargument durch die Forderung  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  eindeutig festgelegt ist.





## 10.5 Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Mit der Eulerschen Formel ergibt sich die **Eulersche Form** der Darstellung einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit } r = |z| \text{ und } \varphi = \arg z.$$

Mit dieser Darstellung vereinfachen sich einige Rechnungen mit komplexen Zahlen. Seien  $r, s \geq 0$  und  $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi]$ . Dann gelten unter Anwendung der Potenzgesetze:

- Multiplikation:  $re^{i\varphi} \cdot se^{i\psi} = (rs)e^{i(\varphi+\psi)}$
- Division: Für  $s > 0$  gilt  $\frac{re^{i\varphi}}{se^{i\psi}} = \frac{r}{s}e^{i(\varphi-\psi)}$

Nun lassen sich die Grundrechenoperationen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch interpretieren.

- Addition und Subtraktion sind gerade die gewöhnlichen (d. h. komponentenweisen) Operationen für (zweidimensionale) Vektoren.
- Bei der Multiplikation werden die Beträge der beiden Operanden multipliziert und die Argumente addiert.
- Der Übergang von  $z$  zur konjugiert komplexen Zahl  $\bar{z}$  entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

## 10.5 Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Zunächst sei noch an den Zusammenhang zwischen den Winkelmaßen erinnert. Ein Vollkreis von  $360^\circ$  entspricht  $2\pi$ . Somit gilt

$$\varphi \text{ in Grad} = (\varphi \text{ in Radiant}) \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Speziell gelten also  $90^\circ = \pi/2$  und  $180^\circ = \pi$ .

Gegeben sei ein Punkt  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  (im kartesischen Koordinatensystem). Dann ergeben sich seine Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  zu

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

und  $\varphi$  als Lösung des Gleichungssystems

$$r \cos \varphi = x \quad \text{und} \quad r \sin \varphi = y \quad \text{mit} \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Dieses trigonometrische Gleichungssystem lässt sich für  $x \neq 0$  lösen, indem man eine Lösung  $\psi$  von  $\tan \psi = y/x$  findet, etwa

$$\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

## 10 Komplexe Zahlen

und dann anhand der Vorzeichen von  $x$  und  $y$  sicherstellt, dass der Winkel in den richtigen Quadranten zeigt, also  $\varphi = \psi + k\pi$  mit dem richtigen Wert von  $k \in \mathbb{Z}$ .

$x$	$y$	$\varphi =$	$x$	$y$	$\varphi \in$
$\geq 0$	$= 0$	$0$	$> 0$	$> 0$	$(0, \pi/2)$
$< 0$	$= 0$	$\pi$	$> 0$	$< 0$	$(-\pi/2, 0)$
$= 0$	$> 0$	$\pi/2$	$< 0$	$> 0$	$(\pi/2, \pi)$
$= 0$	$< 0$	$-\pi/2$	$< 0$	$< 0$	$(-\pi, -\pi/2)$

Schemata der Vorzeichen:

$$\sin : \begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array} \quad \cos : \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array} \quad \tan : \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$$

Gegeben sei ein Punkt in Polarkoordinaten  $z = (r, \varphi) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi]$ . Dann ergeben sich seine kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  zu

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi.$$

### 10.6 Aufgaben

#### 1. Berechne

- $(1 + 2i) + (4 - 3i)$ ,  $(2 + 4i) + 3$ ,  $(4 + 2i) - 2i$
- $(1 + 2i) \cdot (4 - 3i)$ ,  $(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)$ ,  $(1 + 3i) \cdot (-1 + 3i)$
- $\frac{1 + 2i}{4 - 3i}$ ,  $\frac{3 + 2i}{3 - 2i}$ ,  $\frac{1 + 3i}{-1 + 3i}$

#### 2. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$\begin{array}{llll} z_1 = -2i & z_2 = 3 & z_3 = 1 + 2i & z_4 = 4 - 3i \\ z_5 = e^{\pi/4} & z_6 = e^{i\pi/4} & z_7 = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i} & z_8 = -\frac{1}{2}e^{i \cdot 3\pi/2} \end{array}$$

- Stelle die Zahlen grafisch in der Gaußschen Zahlenebene dar.
- Berechne jeweils ihren Betrag und ihr Hauptargument.
- Rechne von der kartesischen in die Eulersche Form bzw. umgekehrt um.