Cheat Sheet: vollständige Induktion

Aufgabenstellung: Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$ gilt.

1. Schritt: Überschrift

- aufschreiben, was zu zeigen ist
- "zu Zeigen: $\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$ für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$"

2. Schritt: Induktionsanfang/Induktionsverankerung

- das kleinste Element einsetzen, $n = 0$ oder $n = 1$ einsetztetn
- ausrechenen und überprüfen ob die Gleichung gilt
- "I.Anf.: $\sum_{i=0}^{0} f(i) = c = g(0)$ wahre Aussage."

3. Schritt: Induktionsschritt

3.1. Induktionsvoraussetzung/Induktionsannahme

- aufschreiben, dass die Gleichung schon bis zu einem n gilt
- "I.Vor.: $\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$ gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$."

3.2. Induktionsbehauptung

- überall wo in der Gleichung n steht $n + 1$ einsetzen
- "I.Beh.:" $\sum_{i=0}^{n+1} f(i) = g(n + 1)$
- wenn es geht, die Ausage vereinfachen oder ausmultiplizieren.

3.3. Induktionsbeweis/Induktionsschluss

- bewweisen, dass aus der Voraussetzung die Behauptung folgt (I.Vor. $\rightarrow$ I.Beh.)

- dafür in die Summe $\sum_{i=0}^{n} f(i)$ und den letzten Summanden f(n+1) zerlegen

$$\sum_{i=0}^{n+1} f(i) = \underbrace{f(0) + f(1) + \ldots + f(n)}_{\text{Summe bis n}} + f(n + 1) = \sum_{i=0}^{n} f(i) + f(n + 1)$$

- dann vordere Summe über I.Vor. ersetzen $\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(i) + f(n + 1) = g(n) + f(n + 1)$$

- zuletzt Terme umformen bis $g(n + 1)$ raus kommt

$$= g(n) + f(n + 1) = \ldots = g(n + 1)$$

$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$ gilt. $\blacksquare$