Aufgabe 1
Sei V der Vektorraum der reellen und symmetrischen 2×2-Matrizen:

$$V = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = A^T\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Basis an.
(b) Ist V unter Matrixmultiplikation abgeschlossen, d.h. gilt $AB \in V$, für alle $A, B \in V$? Begründen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.
(c) Eine Matrix heißt *antisymmetrisch*, falls $A = -A^T$. Sei $\{M_1, \ldots, M_r\}$ ihre Basis aus Aufgabe (a). Geben Sie eine antisymmetrische Matrix N an, sodass $\{M_1, \ldots, M_r, N\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

Aufgabe 2
Sei $0 < \alpha < \pi$ eine reelle Zahl echt zwischen 0 und π. Betrachten Sie folgende Matrix und lineare Abbildung:

$$A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Beschreiben Sie geometrisch, was die Abbildung macht.
(b) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Abbildung.
(c) Ist die Matrix diagonalisierbar, d.h. existiert eine invertierbare Matrix C, sodass CAC^{-1} eine Diagonalmatrix ist?

Aufgabe 3
Sei A die folgende, von einem unbekannten $a \in \mathbb{Z}_7$ abhängige Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}_7$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A.
(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von A.
(c) Sei $b \in \mathbb{Z}_7^3$ gegeben. Hängt die Lösbarkeit $Ax = b$ vom unbekannten a ab?
(d) Finden Sie ein b, sodass die Lösung von $Ax = b$ von a abhängt.

Aufgabe 4

Gegeben sei die vier-elementige Menge

$$M = \{a, b, c, d\}.$$

(a) Geben Sie eine beliebige Äquivalenzrelation $\sim$ auf M an, unter der sowohl $a \sim b$ als auch $a \sim d$ gilt.

(b) Geben Sie eine beliebige partielle Ordnung auf M an.

(c) Gibt es eine partielle Ordnung auf M die ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist? Falls ja, geben sie eine an, falls nein, beweisen Sie, dass das unmöglich ist.

Aufgabe 5

Die folgenden 10 Aussagen enthalten 4 falsche Aussagen. Finden Sie diese 4 falschen Aussagen und bestätigen Sie die Falschheit mit einem Gegenbeispiel oder Argument.

(1) „4 ist eine Primzahl" ist eine mathematische Aussage.

(2) Wenn G eine Gruppe mit n Elementen ist, dann ist n eine Primzahl

(3) Wenn D eine $n \times n$-Diagonalmatrix ist und A eine beliebige $n \times n$-Matrix, dann gilt $DA = AD$.

(4) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist 2-dimensional.

(5) Es gibt einen Körper der nur endlich viele Elemente hat.

(6) Es gibt eine bijektive lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = e_1$ und $F(e_3) = e_1 + e_2$ erfüllt.

(7) Jede komplexe $n \times n$-Matrix hat n Eigenwerte (wenn man mit Vielfachheiten zählt).

(8) Jede komplexe $n \times n$-Matrix ist diagonalisierbar.

(9) Bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^2$ ist

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}, \right\}$$

eine Orthonormalbasis.

(10) Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, sodass die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unitär ist. Dann ist die Lösung eindeutig.